H
2166

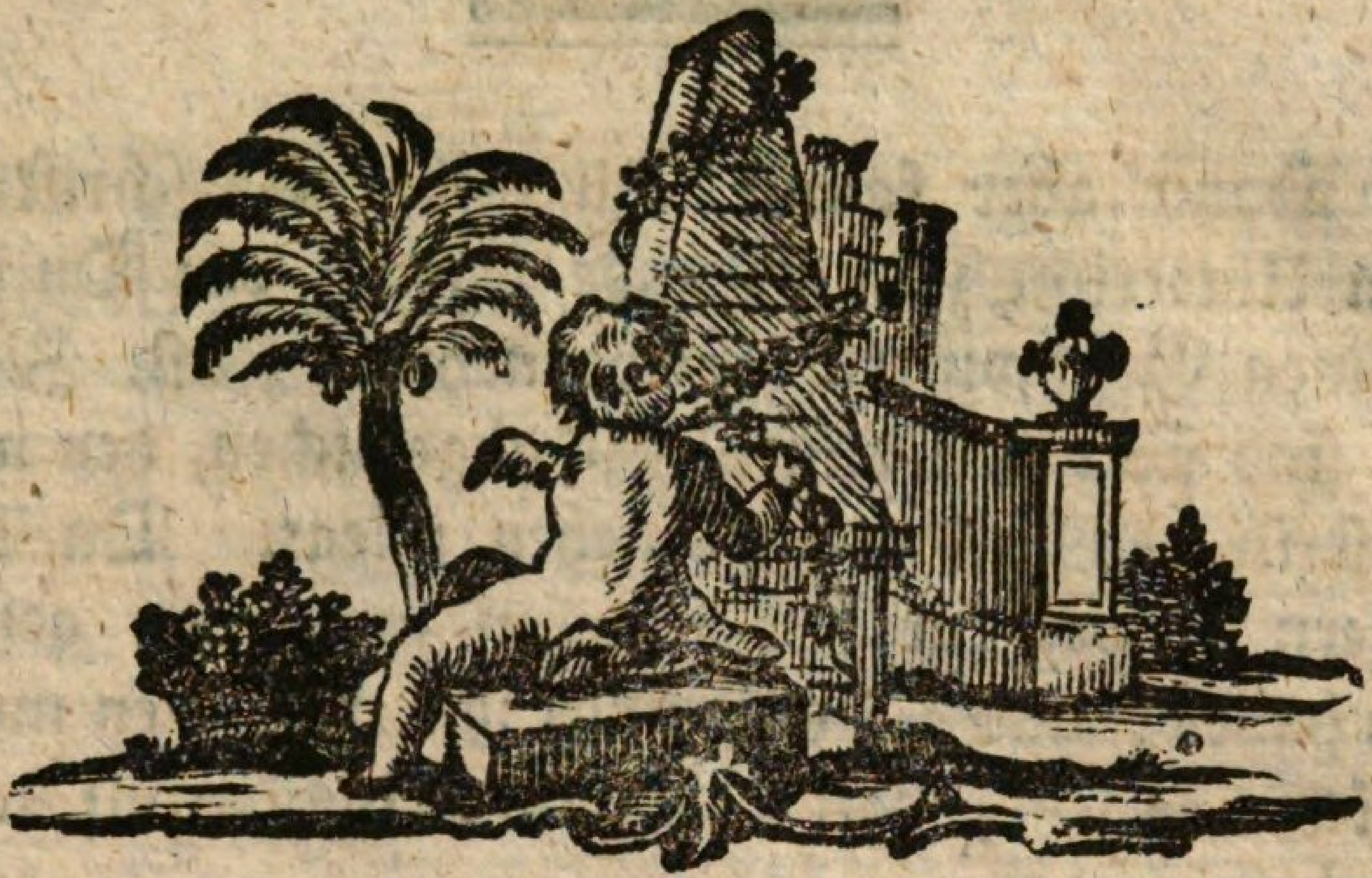
von Halden
N. 2717.

An meinen Aeltsten beinahe Sexjährigen Sohn; über die Art, wie er bisher im Rechnen unterrichtet worden.

EIGENTHUM DER STADT AUGSBURG

Aristoteles (Sittenlehre VI, 8.)
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΜΕΝ ΠΑΙΣ ΓΕΝΟΙΤ' ΑΝ.

Lüneburg, 1781.
Bey Johann Friederich Wilhelm Lemke.



Es ist nun schon über ein Jahr, daß Ich mich bemühet habe, Dir und zweien Deiner Geschwister Unterricht im Rechnen zu geben. Du hast selbigen, obgleich Du mehrmals krank gewesen, ganz gut genutzet; so daß Ich mit Vergnügen die Zeit, die Ich dabei verwenden müssen, andern Geschäften entzogen. Oft hast Du auch Lob erlanget; zumal wenn Du weit eher, als Ich selbst dachte, daß Du vermögend sein würdest, was ich Dir sagte, begriffest. Zu Deinem Vergnügen und Nutzen will Ich jetzt alles, was Wir bisher mit einander in diesem Stück vorgenommen haben, beschreiben; womit ich vielleicht fortfahre, so wie Wir weiter kommen. Manches wirst Du nun deutlicher kennen lernen. Du kannst auch daraus Dich Raths erholen, wenn Dir mal etwas entfallen sollte.

Dann aber kannst Du meine Vorschrift bei dem Unterricht zum Grunde legen, den Du mit Deinen Geschwistern nun vornehmen sollst. Ziemlich sind Wir von dem Wege abgewichen, den man sonst in den Schulen zu gehen pflegt. Da Wir unsern Abweg kurz, angenehm und sicher gefunden haben; und Dein Beispiel ihn empfehlen muß: so kann es sein, daß auch andre Uns darauf nachwandeln mögen.

Das **Rechnen** kennst Du längst als Etwas, wobei man mit Zahlen kramet. Jetzt weist Du auch, daß man dadurch lernt was sich von Zahlen sagen lässet, und aus bekannten Zahlen unbekannte erfindet.

Zählen lerntest Du zuerst ohne meine Anweisung, von Deinen Wärterinnen. Ich erhellte diese Kenntniß, indem Ich Dich aufmerksam machte, daß Ein Pferd, Ein Esel und Ein Vogel nicht zusammen gezählt werden könnten, wenn ich sie nicht mit einem Namen, der jedem von ihnen gemeinschaftlich zukäme, zu belegen vermöchte; und also jene Geschöpfe 2 vierfüßige Thiere und Ein Vogel, aber in Allem 3 Thiere wären. **Zählen** geschiehet also, wenn man untersucht wie viel Dinge Einer Art vorhanden. Was man dadurch findet, das ist eine **Zahl**.

Jede Zahl hat ihren besondern Namen; so wie der Anfang jeder Zahl, oder das Allgemeine, wornach ich die Theile der Zahl zusammen zähle. Dieser Anfang ist die **Einheit**, die man aber mit für eine Zahl ansehen mag.

Ein,

Ein, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sex, Sieben, Acht, Neun, Zehn u. s. f. Einen ganzen Haufen solcher Namen konntest Du nach der Ordnung herbeten. Ich lehrte Dich die Ordnung erkennen, wornach diese Namen gebildet worden; daß man nur bis auf zehn zählte, und dann immer von Vorn wieder anfienge; daß zwei Zehner **Zwanzig**, drei Zehner **Dreizig** u. s. f. hießen; daß zehn Zehner **Hundert** hießen; daß auf gleiche Weise zehn Hunderte nach einander gezählt werden müsten, die man denn zusammen **Tausend** benennte; daß eben so die Tausende nach Zehnern, nach Hunderten, nach Tausenden geordnet würden; aus Tausend der Tausende eine **Million**, aus Tausend mal Tausend Millionen eine **Billion** würde.

Klar und deutlich ward Dir das Alles erst recht, als Du auch die Zeichen kennen lerntest, womit man die Zahlen ausdrücket, welche Zeichen man **Ziffern** nennet. Jetzt kennst Du die **Römischen** und die sogenannten **Arabischen** Ziffern. Mit jenen haben Wir, weil Uns ein Ohngefehr zuerst darauf gebracht, den Anfang gemachet. Nachdem Wir aber ihre Vorzüge beim ersten Unterricht gefunden, rechnen Wir jezt alles mit beiderlei Ziffern fort; und Du bist nun so gewandt mit der einen Art umzugehen, als mit der andern.

Weist Du noch, wie Wir oft mit einander getändelt haben, indem wir aus länglichten Spielmarken eine I, ein V, ein X, ein L, ein M hinlegten?

legten? Unser C ward zwar etwas unförmlich, aber recht seinem ersten Ursprunge gemäß, wie Ich Dir beim Voß*) gezeiget, aus dreien Marken [, und Unser D aus vieren []. Wir konnten damit Alles ausdrücken, setzten auch so aus mehrere Zahlen Eine zusammen, und fiengen an eine kleinre Zahl von einer größern abzuziehen. So oft wir fünf I oder Striche hatten, ward dafür ein V, für zwei V ward ein X, für fünf X ein L, für zwei L ein C, für fünf C ein D, und für zwei D ein M hingelegt. Wir bedeckten einen großen Tisch mit unsern Zahlzeichen. Raum und Marken fehlten uns manchmal. Du lerntest aber so völlig den Werth eines jeden Zeichens, das Verhältniß des einen gegen jedes andre, und bekamest eine Fertigkeit im Zählen auch großer Summen, und deren Werth durch Römische Ziffern auszudrücken.

Die Unbequemlichkeit, die sich bey diesem Verfahren, wegen seiner Weitläufigkeit, fand, brachte mir die Rechentafel der Alten ins Gedächtniß. Ein Pochbrett, das mehrere Jahre vergessen gelegen hatte, ward hervorgesucht. Es ließ sich vortreflich zur Rechentafel einrichten. Es war noch zu gut; und da Du nun auch das herrliche Pochspiel zu lernen begierig warest, unterblieb mein erster Entschluß, jedes mit Leisten abgetheiltes Fach des Bretts mit einer der Römischen Ziffern durch den Mahler bezeichnen zu lassen, davon es gerade so viel fassen konnte: M, D, C, L, X, V, I. Ich bezeichnete also eine halbe Spielkarte mit dem eben besag-

*) De univ. Mathes. nat. et constitut. C. VIII. §. 4.

besagten Zeichen, die Wir in die Fächer legten. Bald merkten Wir die große Bequemlichkeit, die eben die Beweglichkeit der Zeichen gab. Jetzt ist Unsre Tafel so eingerichtet, daß Wir Millionen darauf theilen und zehntheilige Brüche darauf behandeln können. Da nämlich diese Tafel für jedes Fach 7 Abtheilungen, die Länge herunter, hat: so legen Wir die Zahlblätter in zwei, auch wohl drei Reihen hinein, dadurch ins Fach, welches, nach der 1sten Reihe, die Einheiten hat, VM, ins Fach der V nunmehr XM, u. s. f. kömmt, diese 2te Reihe aber sich mit V Millionen schließet. Sind Wir mit den höhern Ordnungen fertig: so lassen sich nach und nach die Blätter für die niedrigern hineinlegen.

Jede mögliche Zahl auf unsrer Tafel auszudrücken, hat Dir nie Schwierigkeit gemachet. In ein jedes derer Fächer, davon die Gattung der Ziffern in der gegebenen Zahl vorkömmt, werden so viele Marken, wozu nun die runden am bequemsten sind, geleget, als von dieser Gattung die Zahl angiebet. MCCLVIII giebt nämlich 1 fürs Fach von M, 2 fürs Fach von C, 1 fürs Fach von L, 1 fürs Fach von V, und 3 fürs Fach der Einheiten.

Deine Aufmerksamkeit zu stärken, habe ich auch die Veränderung vorgenommen, daß ich die Tafel auf einer ordentlichen Schreibtafel abgebildet, und die in jedes Fach zu legenden Marken mit Ziffern ausgedrücket, folgendermaßen:

M	D	C	L	X	V	I
3	1	2	1	4		2

Dreitausend Siebenhundert Zwei und Neunzig sind hier angezeiget. Manche Aufgabe haben Wir auch auf diese Weise ausgerechnet.

Die **Arabischen** Ziffern, die andre lieber **Indische** nennen, hast Du erst kennen gelernt, als Du die Römischen schon kanntest. Nun erklärte Ich Dir, auf Unsrer Rechentafel, die Art Zahlen zu schreiben, wobei allemal 10 Marken der geringern Klasse eine Einheit für die nächst höhere Klasse geben.

Die Unbequemlichkeit war hier gleich sichtlich. Die Fächer wurden oft mit zu vielen Marken, mit 8, mit 9, angefüllet, und sehr oft war man nicht im Stande gleich durch den ersten Blick wahrzunehmen, sondern muste erst nachzählen, wieviel Stück in Einem Fach lagen. Hier bemerkten wir die Klugheit, womit die Römer, obgleich sie auch bis Zehn gezählet, doch im Schreiben der Zahlen allemal zwischen dem Zehnfachen noch Ein Glied in die Mitte gesetzet, so daß abwechselnd 5 Einheiten Ein V, 2 V, Ein X, 5 X, Ein L, 2 L, Ein C, 5 C, Ein D, und 2 D, Ein M machen. Man kann zwar durch ähnliche Mittel der besagten Unbequemlichkeit bei den Arabischen Ziffern abhelfen: aber das ist denn schon etwas Erborgtes, das nicht aus der natürlichen Einrichtung jener Ziffern folgt, und doch nicht bei Anwendung jeder Rechnungsart Nutzen schaffet.

Unter diesen beiden Zifferarten, der Römischen und der Arabischen, habe Ich den Unterschied Dir bemerklich gemachet, daß bei jener keine Ziffer

eigent-

eigentlich ihren Werth von dem Platz bekömmt, worin sie gesetzt worden; nur daß die höhere allemal der geringern zur Linken des Schreibenden gesetzt wird, und freilich bei VM z. E. das M mit als ein Theii der Ziffer V angesehen werden muß; bei den Arabischen Ziffern aber dieselbe Ziffer in dem 1sten Fach etwas anders, als in dem 2ten, und je nachdem etwas anders bedeutet, als das Fach verschieden ist, worin sie stehet. Bei der Arabischen Art wird eigentlich die ganze durchs Zehnfache aufsteigende Rechentafel, bis zu dem höchsten Fach der Zahl, die man schreiben will, hingeschrieben, und die leren Fächer werden mit einer o ausgefüllet: bei der Römischen Art aber werden diejenigen Fächer, für welche die gegebne Zahl nichts hat, ausgelassen. Daher muß diese Zifferart den Namen jedes Fachs angeben; da jene ihn aus dem Platz errathen lässet.

Weiter habe Ich mit Dir in dergleichen Betrachtungen nicht hineingehen wollen. Befragt habe Ich Dich jedoch, ob Du meintest, daß es nothwendig wäre, daß man bis auf 10, und so durchs Zehnfache fort, zählte. Als Du mir nicht zu antworten wustest; was gab Ich Dir an, wie die Menschen darauf gekommen sein müsten, daß sie bis auf 10 gezählet? Erinnerte Ich Dich nicht an Deine 10 Finger, die Dir jetzt noch oft zur Hülfe beim Rechnen dienen müssen, und gewiß lange dem Menschen weit mehr dazu gedient haben, als er, vielleicht ein Jahrhundert hindurch, nicht zu der Kenntniß im Rechnen gelangen konnte, die

Du nun schon besitzest. Willkührlich ist es völlig, ob man nur bis 2, oder bis 13; oder bis auf jede andre Zahl, fortzählet, und darnach eine ganze Art zu zählen und Zahlen zu schreiben einrichtet. Das habe Ich Dir demnächst zu erklären versprochen. Doch habe Ich Dir schon von den **Chinesern**, dem hochmüthigen Volke, gesagt, das uns Europäern nur ein Auge zu haben zugestehet, und allein mit zweien Augen zu sehen vermeinet, das ehemals nur bis auf 2 gezählt haben soll; welche Zählart **Leibnitz** uns gelehrt hat, wornach es nun begreiflich ist, unzähliche andre zu erfinden.

Du kannst, wie Ich schon beregt habe, überaus große Zahlen mit Römischen und mit Arabischen Ziffern ausdrücken: ja es wird Dir fast nicht fehlen, schon alle mögliche Zahlen schreiben zu können. V Millionen heißen auf unsrer Rechentafel: VMM. Ob die Römer so geschrieben haben, kann Uns gleichgültig sein. Genug Wir können allenfalls M^2 bedeuten lassen eine Million, M^4 eine Billion, M^6 eine Trillion, und so fortan. Bei den Arabischen Ziffern weist Du, daß man, von der rechten Hand ab, drei Ziffern abzählet, dann einen Strich unten machet, und daß denn die Ziffer vor dem Strich nach der linken Hand zu, oder die 4te, als Tausend ausgesprochen wird; daß man nach der sexten Ziffer wieder unten einen Strich und oben eine I machet, welche anzeiget, daß die 7te Ziffer als Million auszusprechen sei; daß in ordentlicher Abwechselung, jeder Abschnitt mit 3

Ziffern

Ziffern kein Zeichen oben, und dann wieder eins bekommt; welche Zeichen, nach der linken Seite zu, die Römischen Ziffern in ihrer natürlichen Ordnung enthalten; da denn die II angiebt wo die Billionen, die III wo die Trillionen, u. s. f. sich endigen; bei den bloßen untern Strichen aber allemal Tausende auszusprechen, die, nach ihrem Platz, Tausende der Einheiten, oder der Millionen, oder der Billionen u. s. f. sind.

II I
Z. E. 784,532,096,103,457.

Alle diese bisher gedachte Kenntniß hast Du jezt wirklich. Du hast aber manche davon nicht eben in der Ordnung erlangt, worin Ich sie Dir jezt vortrage. Indem Wir fortgeschritten sind, haben Wir immer hie und da an unsrer Wissenschaft ausgeflickt, so wie Wir vermerkten, daß sie Uns nicht hinlänglich war.

Früh habe Ich Dir gesagt, daß die ganze **Rechenkunst** fast nichts anders wäre, als daß man Zahlen mit einander verwechselte, die Verwechselung aber müßte so geschehen, daß der Werth der Zahlen, wie er vorhin angegeben worden, völlig bliebe. Zwischen diesem mir angegebenen Werth, und demjenigen, den ich nun bestimmte, müste ein Zeichen sich sezen lassen, wozu man dieses = gewählet, welches anzeigte, daß eine eben so große Zahl auf der Einen Seite befindlich wäre, als auf der andern.

Diese Verwechselung geschiehet, daß man entweder zusammensezet, oder trennet. Man giebt

mir

mir die Theile, woraus Ein Ganzes gemacht werden soll; welches im allgemeinen Verstande **Addiren** heißt: oder man giebt mir das Ganze, es in gewisse Theile zu zerlegen. Sind die Theile gegeben: so braucht es nicht eben, daß sie alle von gleicher Größe sein müssen, oder es ist solches schlechterdings nothwendig. Das Verfahren, was man in jenem Falle, zu Erfindung des Ganzen, beobachtet, heißt im besondern Verstande das **Addiren**; was man aber in diesem Falle gebrauchet, das **Multipliziren**. Soll eine Theilung vorgehen: so soll ich das Ganze entweder nur in zwei Theile zerlegen, davon eins so groß ist, als mir angegeben worden; oder ich soll lauter gleich große Theile, und ihrer so viel machen, als mir angegeben worden. Zu jenem brauche ich das **Subtrahiren**, zu diesem das **Dividiren**.

So hast Du eine klare Vorstellung von den sogenannten **Vier Rechnungsarten**, die im Grunde nur zwo sind. Man pflegt sie in dieser Ordnung abzuhandeln, daß auf das Addiren das Subtrahiren, dann das Multipliziren und zuletzt das Dividiren folge. So gehet man freilich vom Leichtern zum Schwerern fort: Also will Ich auch jetzt mich darnach richten.

Gieb Acht, was Wir beim **Addiren** thaten.

Auf Deine Rechentafel ließ Ich Dich legen Eine Zahl, und noch Eine Zahl, und mehrere

Zahlen. Nun war die Frage wie die Zahl hieße, die eben so groß wäre, als die andern alle zusammengenommen. Ich zeigte Dir, wie man was von mehrern der gegebnen Zahlen in demselben Fach läge, zusammen zählen, und, wenn es dann so viel, als eine Einheit für ein höheres Fach, ausmachte, in selbiges übertragen, und so durch alle Fächer der Tafel nach der Reihe fortfahren müste. Fünf Einheiten mustest Du bei dem Verfahren aussprechen, geben Ein V; Zwei V geben Ein X; Fünf X geben Ein L; Zwei L geben Ein C; Fünf C geben Ein D; Zwei D geben Ein M; u. s. f. Das ist alles so kinderleicht, daß selbst Dein flüchtiger Bruder es gar bald gefasset hat; obschon er noch manchmal sich äußerst verwirrt beim Rechnen anstellen kann.

Bei den Arabischen Ziffern wustest Du nun schon von selbst wie man addiren müste. Jede Ziffer, dachten Wir, läge in dem gehörigen Fach auf unsrer Tafel. Zehn Eines Fachs ergeben allemal eine Einheit für das nächst höhere Fach. Also war die Regel: Man muß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte, Tausende unter Tausende genau setzen, und dann bei einer jeden Reihe oder Ordnung nur den Ueberschuß über die durchs Zusammenzählen herausgebrachten Zehner hinschreiben.

Die Zahl, die solchergestalt herausgebracht wird, indem ich die gesammten Theile mehrer Zahlen nach und nach zusammenlese, heißt die **Summe**, wie Du längst weißt. Dieser

Dieser Ausdruck ist Dir auch nicht mehr unbekannt: 2 † 3 = 5; Zwei soll zu Drei addirt werden; dann ist die Summe Fünf. a † b † c = d heißt: Die drei durch † verbundnen Größen, von denen nun jetzt nicht in Betrachtung gezogen wird was sie in Zahlen bedeuten, geben eine Summe, die so groß ist als d.

Beim **Subtrahiren** fanden Wir auf unsrer Rechentafel eine große Bequemlichkeit. Von einer gegebnen Zahl soll ein gegebner Theil weggenommen werden, damit ich den noch übrigen Theil finde, der mit dem gegebenen Theil denn das Ganze ausmachet. Nachdem Wir beide gegebne Zahlen, das Ganze und den einen Theil, auf unsre Tafel gehörig und abgesondert hingelegt hatten, nahmen Wir erst bei einem jeden Fach, soweit es angieng, von jeder der beiden Zahlen gleichviel weg. Die Fächer überschlugen Wir, die nur von Einer der Zahlen etwas enthielten. Als Wir so alle Fächer durchgegangen waren, giengen Wir zum höchsten Fach, worin noch von der kleinsten der gegebenen Zahlen etwas lag. Damit Wir nun in dieses Fach einen Theil der größern Zahl, davon der Abzug geschehen könnte, brächten, nahmen Wir eine Einheit aus dem nächst höhern Fach her, welche Wir, nach ihrem ordentlichen Werth, in das Fach legten, wo eben der Abzug vorzunehmen war. Lag in dem nächst höhern Fache nichts: so giengen Wir so lange immer höher, bis Wir auf ein Fach kamen, worin etwas befindlich war, wovon denn immer

weiter herunter auf das nächste Fach überzutragen war, bis man an dasjenige kam, worin etwas von der abzuziehenden Zahl lag. Ein M, sagen Wir z. E., giebt 2 D, Ein D 5 C, Ein C 2 L, u. s. f.

Mit den Arabischen Ziffern ist es völlig eben so. Reichen die Einheiten oder Zehner der größern Zahl nicht zu, daß man die Einheiten oder Zehner, ꝛc. der kleinern Zahl davon abziehen könne; so nehme ich eine Einheit von der nächst höhern Ordnung herüber, welches man bei selbiger durch einen Punkt anzeiget; da denn diese Ziffer, bei welcher der Punkt stehet, Eins weniger gilt.

12˙5˙6 davon
169 abgezogen werden;

lassen übrig: 1087

Da 9 von 6 sich nicht abziehen lässet, und ich, nach Herübernehmen der Einheit aus der höhern Klasse, welche Einheit in der geringern 10 gilt, 9 von 16 abzuziehen habe: so habe Ich Dir aus unsrer Rechentafel ein Hülfsmittel angegeben, den Rest leichter zu finden. Wir sagen nämlich: 9 läßt sich nicht von 6 abziehen: aber 6 kann doch bei der 9 wirklich 6 tilgen; da denn nur noch 3 abzuziehen übrig bleiben, die, von den 10, die aus der höhern Ordnung hergekommen sind, abgezogen, 7 übrig lassen. Fällt uns nicht gleich ein was übrig bleibt, wenn 6 von 14 abgezogen werden: so sagen Wir: 4 von 6 lassen 2, und 2 von 10 lassen 8.

Bei der Subtrakzion bedienet man sich dieses Zeichens —. 4 — 2 = 2. Die Zahl die man durch selbige findet, heißt die **Differenz**. a — b = c. Hier ist c die Differenz, die, mit b zusammengenommen, gleich ist dem Ganzen a.

Wer unsern Unterricht bis hieher angehöret, sollte zweifeln, ob Du auch wüßtest mit **benannten Zahlen** umzugehen. Der Zweifler komme und sehe unsre Rechentafel an, auf welcher Wir in das nächste Fach unter dem, welches die Einheiten der Thaler enthält, dieses Zeichen: $\frac{I}{III}$ Rthlr. und so fortan legen: $\frac{I}{VI}$ Rthlr.. I Ggr., VI ₰, I ₰. Sex Pfenninge geben Einen Sexer, Zwei Sexer geben Einen Ggr., Vier Ggr. geben Ein Sextel Thaler, Zwei Sextel geben Ein Drittel Thaler, und von diesen machen Drei Einen ganzen Thaler. Eben so haben Wirs in Ansehung der Pfunde, Lothe und Quentinen gemachet. Wem sollte das Addiren und Subtrahiren bei solchen Größen noch Schwierigkeit machen können? Mit den Arabischen Ziffern verfährt man so, daß man z. E. von der gefundnen Summe der Pfenninge so oft, als sichs will thun lassen, 12, als so viel Einen Groschen ausmachen, abziehet, und einen Groschen, den ich, beim Subtrahiren etwa nach den Pfenningen hinüber zu nehmen brauche, in 12 ₰ übersetzet. Sobald ich nun weiß was für eine Zahl eine Einheit der höhern Gattung für die nächst geringere Gattung giebet; sobald ist alle Schwierigkeit gehoben. Ein Thaler hat 24 Ggr.

Ein

Ein Ggr. 12 ₰. Ein Pfund hat 32 Lothe, 1 Loth 4 Quentin.

Multipliziren heißt eine Zahl so oft zu sich selbst addiren, als eine andre gegebne Zahl Einheiten enthält. Diese andre Zahl heißt der **Multiplikator**. Was durchs Multipliziren herausgebracht wird, heißt das **Produkt** oder **Faktum**. Die beiden gegebne Zahlen heißen mit einem allgemeinen Namen **Faktoren**. Es ist gleichgültig, welchen von beiden Ich als den Multiplikator Mir gedenken will. 2 mal 3 ist soviel als 3 mal 2.

Beim Multipliziren habe Ich zuerst Dir das **Pythagorische Täflein** oder das **Einmaleins** bekannt gemachet, welches seinen Namen vom **Pythagoras**, dem großen Verehrer der Rechenkunst, erhalten hat, der glaubte, daß er mehrmals in der Welt gelebt hätte. Ob dessen Einmaleins so ausgesehen habe, als wie das gewöhnliche, das hinter Deinem Katechismus stehet, und wovon Ich Dir mehrerlei Abbildungen gezeigt habe, ist noch die Frage. Ich glaube das Unsrige, was Wir bei Unsrer Rechentafel gebrauchen, sei dem seinigen ähnlicher. Denn Wir brauchen nur bis auf 4 die Produkte; und er schwatzte viel von der **Tetraktys**, die, wenn sich gleich schon mancher Gelehrte über den Sinn derselben den Kopf zerbrochen hat, doch durch ihren Namen anzeiget, daß die Vier dabei sonderlich in Betrachtung gekommen.

II	mal	II	ist	IIII.
II	—	III	—	VI.
II	—	IIII	—	VIII.
III	—	III	—	VIIII.
III	—	IIII	—	XII.
IIII	—	IIII	—	XVI.

Das ist unser ganzes Einmaleins, sehr bequem für den, der sein Gedächtniß nicht ansträngen mag. Alles Mögliche können Wir damit multiplziren. Denn da das Multiplziren geschiehet, indem Ich einen Theil der zu multiplzirenden Zahl nach dem andern vornehme, und also von Einem Fach unsrer Rechentafel zum andern fortgehe; in keinem Fach aber mehr, als höchstens 4 Stück, liegen können: so brauchen Wir insofern auch nur höchstens ein Faktum von 4 zu wissen. Aber, möchte ein andrer den Zweifel einwenden, wenn nun im Multiplikator ein V enthalten? Du weist die Antwort darauf, daß Wir mit V auf solche Weise gar nicht multiplziren, sondern uns auf andre Weise helfen. Legen Wir von Unsern Zahltäfelchen das X ins Fach der Einheit, in das nächst höhere, oder ins Fach des V, des L, und so fortan in die höhern Fächer die Täfelchen, wie sie beym Aufsteigen der Zahlzeichen unmittelbar auf einander folgen: so ist die Zahl, die vorher auf der Rechentafel lag, mit X multiplziret. Machen Wirs eben so, indem Wir das Täfelchen mit C ins Fach der Einheit legen: so wird die Zahl mit C multiplziret. Legen Wir so M ins Fach der Einheit: so wird die gegebene Zahl mit M multiplziret. Soll ich aber mit V, mit L und

mit

mit D multipliziren, so geht dasselbe Verfahren nicht an: Denn dadurch käme X ins Fach des V, welches X von selbigem nicht das Fünffache, sondern nur das Gedoppelte, enthält. Richtig aber verfahren Wir bei jenen drei Zeichen; indem Wir mit dem nächst höhern Zeichen multipliziren, und, weil alsdenn ein Faktum herauskömmt, das noch einmal so groß ist, als was Wir haben wollten, selbiges halbiren; welches sehr leicht auf der Tafel geschehen kann, wie Wir beim Dividiren sehen wollen.

Dir wird es nie entfallen, wie nun das Multipliziren geschiehet. DCCCLXXVIIII. wird mit IIII so multipliziret:

7. M	6. D	5. C	4. L	3. X	2. V	1. I
	1	3	1	2	1	4
1	1	~~1~~		1	1	1
2		~~2~~		~~2~~		
		~~2~~				

Viermal 4 im 1sten Fach ist 16 = 1 im 3ten Fach + 1 im 2ten + 1 im 1sten. Nun gehe Ich zum 2ten Fach. 4 mal 1 ist 4 = 2 im 3ten Fach. Beim 3ten Fach: 4 mal 2 ist 8. 8 + 2 die schon im Fakto hier liegen = 10 X = C. Beim 4ten Fach: 4 mal 1 = 4 L = 2 C. Beim 5ten Fach: 4 mal 3 = 12 C = M + 2 C. 2 C + 2 C + 1 C die insgesammt im Fakto des 5ten Fachs liegen, = 5 C = D. Beim 6ten Fach: 4 mal 1 = 4 D = 2 M. Das Faktum heißt also nun vollständig: IIMDXVI.

Bestehet Unser Multiplikator aus einer Zahl von mehrern Fächern: so hat das eben so wenig Schwierigkeit. Heißt er nämlich CCCLVI: so weist Du, daß Du erst die zu multiplizirende Zahl, dann ihr halbes Zehnfaches, dann ihr halbes Hundertfaches, dann ihr Hundertfaches, nachdem Du selbiges mit 3 multipliziret, hinschreiben, und diese 4 Zahlen addiren must, welches mittelst Unsrer Rechentafel geschehen kann.

Bei den Arabischen Ziffern multipliziren Wir gerade auf dieselbe Weise; nur daß das Einmaleins nun bis auf 9 mal 9 = 81 gehen muß. Du hast selbiges längst gefasset, wenn Dir gleich manchmal etwas davon wieder entfällt.

Das Multipliziren wird auf folgende Weise kurz angedeutet: 4, 5 = 20. oder 5 ⋈ 20. Das heißt: 4 soll mit 5 multipliziret werden, dann ist das Produkt 20. Man setzt auch wohl, wo keine Verwirrung dadurch zu besorgen, die beiden Faktoren bloß neben einander: a b c.

Benannte Zahlen von mehrern Gattungen zu multipliziren, ist auf Unsrer Rechentafel leichter: wiewohl man für Dich nicht eben das Leichtere aufzusuchen brauchet. Man verfahre bei solchem Multipliziren nach welcher Art man wolle: so muß man nur immer darauf merken, wieviele der geringern Gattung eine Einheit der nächst höhern Gattung ausmachen, und wie viele also der höhern Gattung in dem Fakto enthalten, das die geringere Gattung ergeben, welchs denn zu dem Fakto, das

aus

aus der höhern Gattung vor sich entstanden hinzugethan werden müssen.

Das **Addiren, Subtrahiren** und **Multipliziren** wird, der Bequemlichkeit wegen, von dem niedrigsten Fach angefangen. Sonst habe Ich Dir gezeiget, daß man auch von dem höchsten Fach, oder bei welchem Fach man wolle, anfangen könne, nur daß man alsdenn die Arbeit weitläuftiger machet, und leichter sich irren kann; welches leztere jedoch, in Ansehung der beiden ersten Rechnungsarten, bei Unsrer Rechentafel nicht zu besorgen stehet, bei der auch überdem das Subtrahiren vielmehr vom höchsten Fach angefangen wird.

Nun komme Ich aufs **Dividiren**, das mehr Schwierigkeit Uns gemacht hat, als alles übrige. Aber was sollten Wir nicht überwinden können; wenn Wirs Uns einen Ernst sein lassen?

Dividiren heißt theilen, und zwar eine Zahl in gleiche Theile theilen, wobey eine andre gegebue Zahl, die der **Theiler** oder **Divisor** heißt, zum **Maßstab** dienet. Die Zahl, die durchs Theilen gefunden wird, heißt der **Quozient**. $\frac{a}{b} = c$ heißt: a soll durch b dividiret werden, und dann ist der Quozient c. Eben dasselbe wird auch so ausgedrücket: $a : b = c$.

Das Dividiren kann auf zweierlei Art geschehen. Entweder ich zerlege die Zahl, die getheilt werden soll, in so viel Theile, als der Divisor Einheiten enthält, oder ich zerlege ihn in lauter Theile,

deren jedes so groß als der Divisor. Bei jenem Verfahren wird mir der Quozient durch die Zahl angegeben, welche auf Ein Theil fällt, bei diesem Verfahren aber durch die Anzahl der gemachten Theile.

Ist der Divisor keine Zahl von vielen Einheiten: so kann die erste Art sehr bequem auf Unsrer Rechentafel geschehen: IIIMDCCV soll durch III getheilt werden. Ich verfahre so:

M	D	C	L	X	V	I
3	1	2			1	
		7				
		—1	——	—10	—2	
1		2		3	1	
1		2		3	1	
1		2		3	1	

Im Fach von M ist so viel da, daß Ich für jede der 3 Abtheilungen, die nun Mein Divisor verlangt, Eins hinlegen kann. Aber von der Einheit im Fach von D kann Ich Dreien nichts in diesem Fach geben. Ich trage also dies D in das nächst geringre Fach C über. D = 5 C, welche mit den 2 C, die schon dort vorhanden waren, = 7 C. Davon gebe ich jedem 2 C. 1 C bleibt übrig, welches, da es gleich 2 L, auch dort nichts für meine 3 Haufen giebet; also in 10 X verwandelt werden muß, wovon jeder Haufen 3 X bekömmt. Das übrige X = 2 V giebt mit dem ohnedem vorhandene V Uns 3 V, von denen jeder Haufen Eins bekommen

kommen

kommen kann. Auf ein jedes der 3 Theile fallen also MCCXXXV. Dies ganze Verfahren ist viel leichter; wenn man es mit Marken auf der Tafel selbst machet.

Wenn aber der Divisor groß ist: so kann man nicht wohl eben solche Theilung anwenden. Ich muß alsdann die andre Art gebrauchen, wobei Ich nach und nach immer solche Theile, als dem Divisor gleich sind, von der zu theilenden Zahl wegnehme. Aber das gäbe auch eine langwierige Arbeit bei einer großen Zahl, die getheilt werden soll. Doch dem Uebel stehet abzuhelfen. Was sagte Ich Dir, Dich auf die Spur zu bringen, daß Du das Mittel selbst erfündest? Wie wolltest Du es machen, wenn Unser Kornboden ganz mit Korn angefüllt läge, und man von Dir zu wissen verlangte, wie viele Fingerhüte voll Korn darauf lägen? Der Fingerhut oder die Anzahl von Körnern, die selbiger in sich faßte, wobei man nicht drauf achten dürfte, daß manchmal ein Korn größer wäre als das andre, wäre hier der Divisor. Mit dem Fingerhut unmittelbar den ganzen Haufen auszumessen, wäre eine unsägliche Arbeit, vielleicht von mehrern Monaten und Jahren. Also müßten Wir darauf denken, wie Wir mehrere Fingerhüte gleich auf einmal wegnehmen könnten. Nähmen Wir etwa eine Kaffetasse, und fünden daß selbige 50 Unsrer Fingerhüte in sich faßte: so wäre die Arbeit schon bis auf Ihr 50stes Theil erleichtert; wenn Ich mit der Tasse das Ausmessen thäte. Aber Ich könnte nun wieder untersuchen, wieviel solcher Tassen das Maß, welches man hier eine Schale

 nennet,

nennet, anfüllten. Dann wüste Ich: 4 Schaclen geben Ein Spint, 4 Spint geben Einen Himten. Also hat Ein Himten die große Summe von Fingerhüten in sich, die Ich jetzt X nennen will. Nun ließe Ich mit dem Himten in meinem Haufen Korn arbeiten, und würde dadurch bald erfahren, wie vielmal der Himten darin enthalten, dessen Anzahl Ich nur mit X zu multipliziren brauchte.

Eben so, mein lieber Sohn, verfähret man beim Dividiren durch Zahlen. Man erhöhet den Divisor zu der höchsten Ordnung der zu theilenden Größe, siehet zu, wie oft er sich denn abziehen lässet. Kann Ich ihn alsdenn gar nicht, oder nicht weiter, abziehen: so gehe Ich auf die nächst geringre Ordnung herunter, verfahre dabei eben so, als bei der höhern, und wiederhole dieses Verfahren nach und nach bei allen niedrigern Ordnungen bis zum letzten Fach.

Ich kann nicht läugnen, daß es mir selbst Mühe verursacht habe erst einzusähen, wie jene Betrachtung aufs Dividiren bei Römischen Zahlen angewandt werden müsse. Nach mehrern Versuchen und Fehlschlüssen, haben Wir diese Wissenschaft erlanget. IIIMDCCXXXXIII sollen getheilt werden durch III.

Quozient.

M	D	C	L	X	V	I	MCCXXXXVII.
~~3~~	~~1~~	~~2~~		~~4~~		~~3~~	
		~~1~~		~~2~~	~~1~~	2	
III		III		III		III	

Ich

Ich lege diesen Theiler ins Fach von M: so ist er mit M multiplizirет. Denn kann Ich ihn Einmal dort abziehen, und in besagtem Fache bleibt nichts übrig. Für den Quozienten setze Ich M an. Denn, wo das Tausendfache Einmal steckt, da ist das Einfache tausendmal. Nun kann Ich den Theiler nicht ins Fach von D herunterlegen, weil er alsdenn nicht durch D multiplizirt ist, wie Ich oben erwiesen. Lege Ich ihn aber ins Fach von C, X und I, so hat er allemal den Werth des Fachs. Also muß Ich nur in diese Fächer ihn legen. Lege Ich Unsern Divisor in C, so ist dieses Fach jetzt fürs Fach der Einheiten, und das Fach D fürs Fach von V anzusehen. (Nämlich, Ich habe mit V,C und mit I,C zu schaffen, wobei Ich C ganz außer Acht lasse.) Ich sage CCC in DCC, oder III in VII zweimal. II,III = VI. VII — VI = I. Zu dem Quozienten setze ich CC. Nun gehe Ich mit dem Divisor zum Fach von X und sage: III in XIIII viermal. Mein Quozient bekommt XXXX, und, nach dem Abzuge bleiben 2 im Fach von X übrig. Ich lege zuletzt meinen Divisor ins Fach der Einheiten und sage: III in XXIII. Hiebei ist aber ein besondrer Umstand zu bemerken. Unsre Rechentafel und Römische Zahlart wächset nicht über V an; und sobald Wir etwas schreiben wollen das über V, es sei bei den Einheiten oder Zehnern, oder Hunderten, u. s. f. gehet, so bekommen Wir Ziffern aus zweien Fächern, nämlich VI, LX, DC, u. s. f. Also wird es wenigstens zur Bequemlichkeit dienen, daß Wir den Theil des Quozienten, der über V in der Gattung der Hunderte, Zehner und Einheiten, u. s. f. gehet,

 nicht

nicht mit der V auf Einmal, sondern erst Fünfmal nehmen, und denn das Uebrige desselben nachholen. Wir sagen also bei obigem Exempel: III in XXIII Fünfmal, V kömmt zum Quozienten. 3, 5 = 15. 23 — 15 = 8. III in VIII Zweimal. 2, 3 = 6, und 2 bleiben beim Abzuge übrig. Der ganze Quozient ist nunmehr gefunden: MCCXXXVII $\frac{II}{III}$

Die Regel können Wir nun allgemein bilden: Nie wird für den Quozienten mehr auf Unsrer Rechentafel genommen, als das Fünffache. Dann aber muß Ich zusehen, ob der Divisor nicht etwa in dem Rest, den der Abzug des Fünffachen lässet, entweder 4, 3, 2 oder 1mal enthalten sei. Denn wenn Ich den Divisor von einem Fach gleich in eins heruntersetze, das nur den zehnten Theil des Werths hat, den das vorige Fach hatte: so bin Ich davon zwar überzeugt, daß das Zehnfache seines jetzigen Werths nicht mehr in dem übrigen Theil der zu dividirenden Zahl enthalten: aber weiter herunter kann Ich noch nichts schließen. Zwischen dem Zehnfachen aber und dem Einfachen liegen noch 8 Zahlen, von denen die über V gehen mit jenen besagten Ziffern das V verbinden, nämlich VI, VII, VIII, VIIII.

Das jetzt erklärte Verfahren ergiebet, daß zum Dividiren Unser Einmaleins mit den dreien Faktis

II	mal	V	ist	X.
III	—	V	—	XV.
IIII	—	V	—	XX.

vergrößert werden müsse.

Bestehet

Bestehet der Divisor aus einer Zahl, die Ziffern aus mehrern Fächern enthält; oder überhaupt ist mir sein Vielfaches bis zum Fünffachen, dieses mit eingeschlossen, nicht so bekannt, daß ich es auswendig weiß: so verfertige Ich mir gleich eine Tabelle über sein Vielfaches. Z. E.

vom Divisor	CLXXIII ist
das Einfache:	CLXXIII.
— Zweifache:	CCCXXXXVI.
— Dreifache:	DXVIIII.
— Vierfache:	DCLXXXXII.
— Fünffache:	DCCCLXV.

Auf die Art dividiren Wir sehr bequem, der Divisor mag so groß sein, als er wolle. Nur muß man Aufmerksamkeit brauchen, daß man sich nicht, bei neuer Unterlegung des Divisors, irre. Wir bezeichnen auf unsrer Tafel nur das Fach, wo die Einheit des Divisors, oder, wenn selbiger an seinem Ende etwas aus dem Fache der Einheiten hätte, solches hingelegt werden müßte. Von da ab kann man denn allenfalls höher hinauf in die Fächer neben einander die Täfelchen V, X, L, u. s. f. legen: wenn man nicht, so wie Wir, ohne selbige sich den Werth des Theils der zu theilenden Zahl, in welchem eben die Arbeit der Theilung vorzunehmen, in Absicht auf den Divisor merken könnte.

Ist mein Divisor X oder C, oder M, so darf Ich nur, bei der zu theilenden Zahl, das Täfelchen der Einheit ins Fach von X, C oder M, und dann die

die andern Täfelchen so legen, wie sie in der natürlichen Ordnung auf einander im Hinaufsteigen folgen. Endiget sich nun mein Divisor mit X, C oder M, so setze Ich den Divisor und das Dividendum auf gleiche Weise herab, und dividire mit denen Zahlen, die mir dadurch erfolgen, fort. Z. E.

$$\frac{XMDCCCCX}{LX} = \frac{MLXXXXI}{VI}$$

Ist der Divisor V, L oder D: so kann Ich mit dem nächst höhern Zeichen X, C, M dividiren, muß aber was herauskömmt mit II multipliziren, welches Faktum denn den rechten Quozienten giebet.

Mit den Arabischen Zahlen geschiehet das Dividiren im Grunde eben so. Ich erhebe den Divisor zu der höchsten Klasse der zu theilenden Zahl, zu welcher Klasse Ich aber so viele Ziffern rechne, als der Divisor enthält. Ist derselbe denn, nachdem er gehörig untergeschrieben worden, gar nicht in den über ihm stehenden Zahlen enthalten, oder ist er oder sein Vielfaches, so hoch solches geschehen können, abgezogen, so gehe Ich gleich auf das nächste Fach der zu theilenden Zahl mit dem Divisor herunter, ziehe selbigen, oder sein Vielfaches auf gleiche Weise wieder ab, und verfahre so bis ans Ende. Hiebei kann Ich, wie Du weist, mir eben die Bequemlichkeit machen, daß Ich nie mehr auf einmal, als das Fünffache des Divisors, abziehe, und dann erst den Rest nachhole, wobei Ich mir die Regel merken muß, daß Ich nicht eher meine 5 in den Quozienten trage, sondern so lange beiseite setze, bis Ich überzeugt worden, daß der Quozient auf dieser

Stelle

Stelle nicht etwa 5 † y sei; sonst Ich diese Summe, die den 6, 7, 8 oder 9 sein muß, einzutragen habe. Durch dieses Verfahren wird mir gleich das Einmaleins so weit erleichtert, daß sein höchstes Vielfaches nur 9, 5 = 45 bleibet. Ja Ich kann mir denn auch leicht eben so eine Tabelle verfertigen. welche des Divisors Fakta durch die 5 ersten Zahlen enthält. Ist der Divisor und die zu theilende Zahl groß: so kann mir eine solche Tabelle auch dann noch große Bequemlichkeit verschaffen, wenn Ich sie bis zum Zehnfachen, dieses ausgeschlossen, vergrössern müßte.

Beim Dividiren mit Arabischen Zahlen darf Ich gar nicht auf den eigentlichen Werth eines jeden Theils des Quozienten, währender Arbeit, achten. Der Werth ergiebt sich nämlich von selbst aus dem Platz, wohin die Zahl im Quozienten zu stehen kömmt. Aber deswegen muß Ich kein einzig Fach mit dem Untersetzen des Divisors überhüpfen, und wo selbiger in dem über ihm stehenden Theil des Dividendi auch nicht Einmal enthalten, in den Quozienten eine o setzen. Bei den Römischen Ziffern ist das anders, wo Ich allemal beobachten muß, ob Ich mit der Division im Fach des M oder C, u. s. f., beschäftiget bin, damit Ich darnach den Quozienten richtig eintragen könne.

Als Du das Dividiren erst lerntest, hast Du mir früh die Frage gethan, was man denn mit der Zahl machte, die manchmal, wenn die Division zu Ende gekommen war, übrig blieb. Ich antwortete, man setzte selbige mit zum Quozienten hin, zöge unter sie einen Strich und setzte unter selbigen

den Divisor, z. E. $\frac{II}{III}$, $\frac{3}{4}$. Das hieße denn, Zwei sollte noch mit Drei, Drei noch mit Vier dividiret werden, Du fragtest weiter, ob es denn nicht angienge, das Dividiren wirklich vorzunehmen. Ich erwiederte, daß, wenn der Divisor größer wäre als die zu dividirende Zahl, man den Quozienten eigentlich nicht anders, als durch das besagte Zeichen der Division angeben könnte, und man einen solchen Quozienten einen **Bruch** nennte; allein es gienge allerdings an, daß man das Dividiren noch fortsezte, wenn man sich unter dem Fach der Einheiten auf Unsrer Rechentafel noch neue Fächer gedächte, die auf eben solche Weise hinabstiegen, als die Fächer vom M Fach, z. E. bis zur Einheit. Dann könnte das Dividiren bis dahin, daß die Zahl wirklich ganz aufgienge, oder bis dahin fortgesezt werden, daß Ich sagen könnte: Nun muß der Quozient weiter, bis ins Unendliche, so und so lauten. Diese Art, **noch weiter, als bis zur Einheit, zu dividiren**, sagte Ich Dir, hieße den Quozienten in **zehntheiligen Brüchen** finden. Deine Begierde, das deutlicher kennen zu lernen, was Ich Dir hiebei nicht deutlicher zu sagen wuste, zwang mich, die Fächer unter dem Fach der Einheit auf Unsrer Rechentafel gehörig einzurichten. Für mich war das so leicht nicht gethan. Nunmehr wissen Wir aber, daß sie so heißen müssen im Hinabsteigen: I, $\frac{V}{X}$, $\frac{I}{X}$, $\frac{V}{C}$, $\frac{I}{C}$, $\frac{V}{M}$, $\frac{I}{M}$, $\frac{V}{XM}$, $\frac{I}{XM}$, $\frac{V}{CM}$, u. s. f. Auf der solchergestalt eingerich-

keten Rechentafel dividirest Du ohne Anstoß, nach eben den Regeln fort, die Du im Dividiren von oben herab bis zur Einheit beobachten mustest. Wir finden alsdann, daß $\frac{III}{IIII} = \frac{VII}{X} + \frac{V}{C}$ und $\frac{I}{III} = \frac{III}{X} + \frac{III}{C} + \frac{III}{M} + \frac{III}{XM}$, und ins Unendliche fort, so daß jeder folgende Bruch, bei jedem neuen Zusatz zum Quozienten immer in der obern Zahl III bekomme.

Bei den Arabischen Zahlen habe Ich Dir das eben erklärte Verfahren mit den zehntheiligen Brüchen so gewiesen, daß man immer eine 0 neben dem Rest setzen müste, welches eben so viel ist, als wenn auf unsrer Tafel unterwärts 2 neue Fächer angefügt werden. Bei den Arabischen Zahlen hat man aber die Bequemlichkeit, daß man sogleich $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} = \frac{11}{100}$ zusammen aussprechen kann, also, wenn man gleich Anfangs beim Dividiren $\frac{y}{10}$ hingesetzet, wobei y jede Zahl anzeiget, die durchs Dividiren herauskömmt, nur nach und nach zum y den folgenden Theil des Quozienten, unten aber eine 0 hinzufügen darf. Wie das zugehe, weist Du schon, nachdem Du bereits mehr aus der Lehre von Brüchen gefasset, wobei Ich jetzt mich nicht aufhalten kann.

Eine **benannte Zahl zu dividiren** ist leicht gethan, wann Ich nur bei mehrern einander untergeordneten Gattungen bemerke, was eine Einheit der höhern Art in der nächst geringern Art bedeutet,

bedeutet, solchergestalt den Rest bei der höhern Art in die nächst geringre verwandle, dazu addire was etwa sonst noch von dieser geringern Art vorhanden, und alsdenn in dieser Summe das Dividiren fortsetze.

Jetzt weist Du nun was Du dabei denken sollst, wenn Ich Dir sage, daß jede Zahl entweder sich durch irgend eine andre dividiren lässet oder nicht; darnach sie entweder eine **Prim- oder Grundzahl**, oder eine **zusammengesetzte** heißet, und daß die zusammengesetzten Zahlen aus der Multiplikazion von andern Zahlen entstanden sind, und sich in lauter **Primzahlen** müssen auflösen lassen.

Der Theil der Rechenkunst, den Wir bisher hier abgehandelt haben, begreift die **Zählwissenschaft** und den **Algorithmus** oder die **Vier Rechnungsarten** oder **Spezies**. Wir können damit bequem einen Absatz machen; und daher will Ich jetzt hier schließen, obgleich Deine Wissenschaft, in Absicht aufs Rechnen, noch nicht mit dem hier Ausgeführten begränzt ist. Denn, außerdem daß Du schon manches von Brüchen, ihrer Verwandlung in gleichnamigte, und ihrem Addiren, Multipliziren und Subtrahiren weist, so haben Wir auch schon die Lehre von den Verhältnissen angefangen mit einander zu verhandeln. Wenn Du so fortfährest, habe Ich Hoffnung, dereinst in Dir einen mehr als gemeinen Mathematiker zu sehen; das mit wesentlichem großen Nutzen und unend-

lichem

lichem Vergnügen für Dich verbunden, und ganz etwas anders sein wird, als da Ich der undankbaren **Themis** (Du kennst ja die Dame aus der Geschichte, wie sie die gefundne Auster unter die Leute, die Anspruch darauf machten, vertheilte.) fröhnen muß. Manche haben Mir schon den Unterricht, den Ich Dir gebe, in guter Absicht verdacht; indem sie meinen, daß Ich Dich doch, gewissermaßen wenigstens, anstränge: aber Du weist, und mein ganzes Haus auch, daß das nicht geschiehet, und Dir das Rechnen eben so viel Vergnügen machet, als wenn Wir, zu andrer Zeit, vom Vater **Homer** uns erzählen lassen, wie **Odysseus** den grausamen **Polyphem** bezwungen, im hölzernen Roß zu **Ilium** gestecket, und sein treuer **Argus** ihn erkannt hat; oder vom zärtlichen **Ovid** alles, was Deine Bildersammlung von seiner Weltgeschichte enthält. Wir sind Leute für mehrere Fächer. Manchen mag freilich wohl eine Angst antreten, sobald er nur vom Rechnen höret: aber deutliche Kenntniß machet im Grunde gar keine Beschwerde. Die Regeln der Rechenkunst zu erfinden, und durch neue Anwendung derselben, Wahrheit, die bis dahin unbekannt war, zu erforschen, das erfordert Scharfsinn, und kann den Geist, bei langem Ansträngen, ermüden: aber die einmal bekannten Regeln der Vorschrift gemäß anwenden, die ein Erfahrner, indem er darneben steht und immerfort einhilft, giebet, das ist wirklich nur ein Spielwerk, zumal wo man alles so sinnlich treibet, als Wir thun. Ein Par Stunden, die in muntern

term Gespräch über diese Beschäftigung Uns verlaufen, können Deinem Körper nicht schaden. Ist eigentliche schädliche Anstrengung jetzt bei Deinem lernen: so muß sie weit eher in dem Theile sein, da Du aus dem Katechismus und aus dem Gesangbuch so manches ins Gedächtniß prägen must, dabei Du doch nichts gedenken kannst. Ich lasse das, nicht bloß der Schulform nach, sondern auch, weil Ich glaube, daß man in Deinem Alter das Gedächtniß üben müsse, geschehen. Wird Dir aber dabei etwas sauer: magst Du es immerhin anstehen lassen. Soviel siehest Du schon selbst ein, daß die Reden derer sehr unzusammenhängend sind, die Mich anfordern, Dich zum Lateinlernen hinzusenden und Dir schon vorsagen, was Du denn an Vokabeln und aus der Grammatik, und wer weiß aus wie vielen Büchern, lernen müssest, und die dennoch seufzen, daß Ich Dich zum Rechnen ermuntre. Denke daß Dein Vater denn einigermaßen auch weiß was sich lernen lässet. Noch hast Du über meine Härte nicht geklaget, vielmehr meinen Unterricht gern angenommen, auch mich oft dazu aufgefordert. Dagegen lasse Ich Dich oft genug herumtoben, und verdenke Dirs nicht, wenn Du zwischen durch mit größter Begierde ein Mährchen aus Deiner Dorthie Munde auffängst, das Du selbst, bald darauf, höchst abgeschmackt findest. Gute Bewegung ist zur Gesundheit Dir nothwendig. Dem aber, der Dir jene Ergötzlichkeit, und diejenige, die Du ganz herzlich am Puppenwerk, bei Deinen Geschwistern und andern Kindern, finden kannst, weislich übel deuten wollte, dem weist Du mit dem

alten

alten **Aesop**, der oft mit Männern Deiner Größe mit Nüssen zu spielen pflegte, den entspannten Bogen vorzuhalten; (*) wovon er doch vielleicht den Sinn nicht einmal errathen möchte. In Deinen Jahren, und noch eine geraume Ecke weiter, Kind zu sein, bringt Dir noch keine Schande. Wahren Ruhm aber giebet Dir alle Kenntniß, die Du aus Meinem Unterricht erlangest, und Dir schon selbst aus Büchern, aus der biblischen Geschichte, aus **Gellert**, aus **Hagedorn**, aus der Naturgeschichte für Kinder, und noch vielen andern schaffest. In meiner obigen Erzählung, wie weit Wirs mit einander im Rechnen gebracht haben, ist Dir gewiß nicht geschmeichelt. Denn, wer Dich etwa aus meiner Beschreibung erkannt haben sollte, und zweifelt, mag Dich nur, aber durch Mich, welche Bedingung nicht unbillig ist, auf die Probe stellen. Denn es ist gar kein Wunder, vielmehr ganz natürlich, daß zwischen durch wohl mal eine Lücke in Deiner Wissenschaft wieder entstehet, und was Du schon deutlich wustest und klar einsahest Dir wieder dunkel wird. Ein Fremder würde Dich nun dabei schwerlich recht einhelfen können, und könnte leicht für Dich und Mich einen nachtheiligen Schluß ziehen; wenn die Schuld doch bloß an ihm selber läge, daß er Deine Kenntniß nicht recht aufzuspähen, und Dir nicht den rechten Ton anzugeben vermöchte. Gesetzt aber auch, Mich hätte Vaterliebe etwas geblendet: so wird dennoch immer etwas werth sein was Du gelernt hast, und daß Wir eine bequeme

(*) Phaedr. III, 14.

bequeme Art gefunden haben, wie man sich das Erlernen der Rechenkunst erleichtern, und der Römischen Ziffern durchgängig zu allem, zwar mittelbar durchs Rechenbret, oder durch Vorstellung desselben auf der Schreibtafel, bedienen könne. Zur Ehre dieser Römischen Ziffern, und wegen Unsrer Rechentafel, muß Ich noch etwas hinzufügen.

Die **Rechentafel** ist an sich, wie Du weist, nicht von Unsrer Erfindung. Ich habe Dir Abbildungen davon bei **Wolfs Mathematischem Lexiko** und auch sonst gewiesen. Selbige sind aber doch ziemlich nach ihrer Einrichtung von unsrer Tafel unterschieden. Ehemals nannten die Teutschen Rechenmeister das Rechnen auf der Tafel das **Rechnen auf der Linie**; weil sie, statt unsrer Fächer, Linien machten, die Zahlpfenninge darauf zu legen. **Wolf** führt in seinem **Lexikon**, unter dem Artikel **Rechnung auf Linien**, den **Adam Riesen** an, der ehemals in Ruf gestanden haben muß, weil sein Namen noch sprichwortsweise gehört wird. Aber den will ich sehen, der aus seiner Vorschrift beim Multipliziren und Dividiren klug werden soll. Das klügste in seinem ganzen Buch ist wohl, daß er auch Zeugniß in der Vorrede, die aber bei meiner Auflage von 1570 fehlet, geben soll, wie diejenigen leichter das Rechnen lernen, die auf der Tafel den Anfang machen.

Die Arabischen Ziffern haben gewissermassen einen Vorzug vor dem Römischen: man kann nämlich

lich oft kürzer und hurtiger mit jenem fertig werden. Aber man bildet sich oft bei jenen Vorzüge ein, die wirklich nicht vorhanden sind. So gerathe ich kürzlich über das in den Werken des **Wallis** (Vol. III. Pag. 597.) befindliche Bruchstück des Griechischen Mathematikers **Pappus**, woraus ich mich belehren wollte, wie die Alten das Multipliziren, wovon dort nur die Rede ist, beschaffet hätten. Nachdem ich eine gute Weile mich nach deutlicher Kenntniß vergebens umgesehen hatte, vergieng mir die Lust mich weiter zu bemühen; da ich fand, daß **Wallis** sagte, was mit so gewaltig vielen Umständen dort gelehrt würde, wäre im Grunde nichts weiter, als dieses, in Absicht auf die heutige Rechnungsart, daß, wenn Zahlen, die am Ende Nullen hätten, mit einander zu multipliziren wären, so dürfte man nur die Nullen abschneiden, alsdenn die übrigen Zahlen in einander multipliziren, und dem Fakto die gesammten abgeschnittenen Nullen wieder anhängen. Z. B. 30000,2000,10,4=(3,2,4=24)× 100000000 = 2,400,000,000. Diesen Vortheil, meint **Wallis**, gewähre uns bloß das Rechnen mit Arabischen Ziffern, welches er den Indischen Algorithmus nennet. Allein, ob Ich mich gleich auf die Rechnungsart der Griechen nicht einlasse: so ist doch offenbar, daß Ich eben den Vortheil bei der Römischen finde. Denn, Du weist ja, daß Ich, um mit M,C und X zu multipliciren, nur in diese Fächer die Zahl aus dem Fach der Einheiten zu legen brauche. Bezeichne ich jedes

Fach mit einer Zahl, in der Ordnung, wie es auf das Fach der Einheiten, dieses nicht mitgerechnet, folget: so ist X das 2te, C das 4te, und M das 6te. Also muß um so viel hinauf, je nachdem die Multiplikazion solches erfordert, das Fach der Einheiten verrückt werden; und jedes Fach überhaupt kömmt darnach um so viel höher. Nun ist in obgedachter Zahl

XXXM = III, XM

IIM = II, M,

(III, XM), IIM, X, IIII = (III, II, IIII = XXIIII), XM, M, X. XM ist das 8te Fach, M das 6te, X das 2te. Also muß bei XXIIII die IIII ins 16te Fach gelegt werden. Was dieses Fach nun für einen Werth habe, ergiebt die Rechentafel den Augenblick, und, ohne selbige, die Betrachtung, daß, da das Fach von M das 6te ist, jedes Vielfache von 6 ein Vielfaches Fach von M ergeben müsse, also das 12te Fach die einzelnen Millionen unter V, das 16te Fach aber, welches noch 4 Fach weiter, die Hundertmillionen in sich fassen müsse. Da aber, wo die Einheit im Fach der Hundertmillionen lieget, da muß das Zehnfache im Fach der Tausendmillionen liegen. Ich kann aber auch gleich sagen:

XM, M, X = CM². XXIIII, CM².

= IIMCCCCM². Ein schwerer Exempel wäre dieses: IIIM, MDCC, CX, XX. Man merke sich hiebei, daß M und C sehr leicht mit C und X zu dividiren stehen.

IIIM = III, M
MDCC = XVII, C
XX = II, X
CX = XI, X
XVII, II
————
XXXIIII
———— XI
XXXIIII
CCCXXXX
————
CCCLXXIIII
———— III
MCXXII | im 14ten Fach.

Ich gebe zu, daß Dir in diesem läzten Absatze Manches noch unverständlich sein wird: aber Vieles, und wohl das Meiste, verstehst Du davon auch; und das Uebrige sollst Du bald genung verstehen lernen. Denn diesen bevorstehenden Sommer über wollen Wir Uns recht angelegen sein lassen, die Eigenschaft der Dinge zu untersuchen darnach sie gezählt, gemessen und gewogen werden können, oder uns mit **Größen** zu beschäftigen. Die **Rechenkunst** ist ein Theil der **Wissenschaft**, die was von Größen gesagt werden kann lehret und die **Mathematik** oder **Mathesis** heißet; sie erstreckt sich aber über das ganze Gebiet derselben. Sie betrachtet das Wesen der Größe bloß vor sich, und kann sich ganz von den Dingen entfernen, worin selbige sich befindet. Ein andrer Haupttheil der besagten Größenkunde

thut dasselbe beinahe auch: aber er muß doch beständig bei der Größe betrachten, daß ihre Theile neben einander liegen, dadurch die Größe sich ausdehnet und einen Raum anfüllet. Dies ist die **Meßkunst**, an die Wir Uns nächstens wagen wollen; worin **Euklid** und **Archimed**, die Du schon weiter, als dem Namen nach, kennest, sich sehr hervorgethan haben. Jener wird Dich mit der Antwort nicht abschrecken, die er einst seinem Könige, der über die Schwierigkeit des Unterrichts klagte, gab, daß kein für Könige angelegter Lustweg zur Mathematik führte, und Könige sich eben so gut als andre, sie zu erlernen, ansträngen müsten. Der Ruhm aber, den der andre große Mann nachgelassen hat, muß Dich reitzen; so wie Du sein trauriges Ende schon bedauret hast, das er in der Eroberung seiner Vaterstadt von einem rohen Kriegsknecht erhielt, den er mit den Worten aus seiner Studierstube wies: Kerl! verwirre mir nicht meine Zirkel.

Geschrieben zu Anfange des Märzmonats 1780.

Fortsetzung.

Lieber Sohn!

Mit dem Abdruck der vorstehenden Abhandlung hat es, wider Mein Vermuthen, und, da Du noch keine andre, als gedruckte Schrift, lesen kannst, zu Deinem Verdruß, ziemlich gezögert; so daß drey Viertel Jahr darüber verlaufen sind. Wir sind inzwischen, zwar nicht nach Unserm Wunsch und Unsrer Hoffnung, weil Krankheiten Dich wieder heimgesuchet haben, doch in Unsrer Kenntniß der Wissenschaft, die sich mit der Natur der Größen beschäftigt, fortgegangen. Von Dreiecken und vom Zirkel hast Du schon etwas begriffen; das ist aber noch zu wenig, als daß man davon etwas öffentlich sagen könnte. Beim Rechnen ist Unsre meiste Beschäftigung auch nur eine oftmalige Wiederholung des im Vorigen Erklärten gewesen; damit Du eine größere Fertigkeit in Anwendung der gelernten Regeln bekämest. Etwas aber hast Du doch Neues in der gedachten Zeit gelernt. Weil Mein Herr Verleger nun gern siehet, daß zu den Par Bogen, die Er Unserntwegen abdrucken lassen, noch Etwas hinzukomme; kann Ich Ihm leicht willfahren. Doch will Ich nur auf dasjenige Mich einschränken, was zu eben der besondern Materie, die Ich im Vorigen abgehandelt habe, gehöret, und selbige ergänzet.

Vorhin hatte Ich nur überhaupt Dir angezeiget, daß es völlig gleichgültig wäre, ob man, wie

Wir jetzt gewohnt sind, bis auf Zehn und durchs Zehnfache fortzählte, und darnach die Zahlen bezeichnete: nunmehr aber weist Du schon, wie man allenfalls verfahren muß, wenn man einer andern Zähl- und Zifferart, oder Rechnung (Calculi) sich bedienen will. Wir machen Uns die Sache folgendermaßen deutlich, und erschöpfen zugleich ihr ganzes Wesen.

Anfangs haben die Menschen vermuthlich so gezählet: Eins, und noch Eins, und noch Eins, u. s. f. gleichwie sie durch beständige Wiederholung des Zeichens, welches sie nun, zu Ausdrückung der Einheit angenommen hatten, ihre Zahlen, oder die Sammlung von Einheiten, die sie eben bezeichnen wollten, schrieben. Bald ward aber, als, bey vermehrter Kenntniß, größere Sammlungen von Einheiten auszudrücken waren, die Wiederholung desselben Worts und desselben Zeichens beschwerlich. Man erfand also neue Namen für besondre Sammlungen von Einheiten, und so dachte man auch auf Zeichen, die durch ihren Anblick gleich die Menge von Einheiten zu erkennen gäben, die sie vorstellen sollten. Bedenke nur mal: Wenn der Strich, womit Wir die Einheit bezeichnen, zehn Mal hinter einander gesetzt ist: so kann Ich nicht eher wissen, welche Zahl Mir nun angezeigt worden, als wenn Ich die einzelnen Striche nach einander zähle. War nun die Sprache auch noch nicht bequem zum Zählen eingerichtet: so war die Qual gewiß groß; wenn Ich mehr, als eine kleine Zahl, Mir deutlich vorstellen, und andern begreiflich machen wollte.

Eine große Erleichterung gab also die Bezeichnung einer jeden besondern Menge von Einheiten mit einem besondern Zifferzeichen. Wäre man aber damit zufrieden gewesen, ohne weiter die Namen und Zeichen in gewisse Klassen zu bringen, und was zu Einer Klasse gehörte kenntlich zu machen: so würde eine Zählart entstanden sein, die man nie vollständig hätte lernen können. Denn jede mögliche Zahl hätte ein eignes Wort und eine eigne Ziffer gehabt; von beiden wäre die Menge unendlich worden. Nie hätte man auch andre Sammlungen von Einheiten, als davon man schon mal gehöret, mit Worten und mit Ziffern bezeichnen können; oder man wäre, bei eigner Bezeichnung neuer Zahlbegriffe, in Verlegenheit gewesen, die Sprache und die Ziffern mit etwas zu bereichern, das andre nicht ohne Erklärung verstehen können. Vielleicht hätten so, bei demselben Volke dieselben Zahlbegriffe, zu gleicher Zeit, verschieden können bezeichnet werden; daraus, mit beschwerlichem Ueberfluß, mehrere Zeichen für denselben Begriff entstanden wären. Also musten nur einige Zahlbegriffe mit neuen Worten und Ziffern bezeichnet werden, und dieses muste nach einer gewissen gleichförmigen Regel geschehen, die sich auf alle mögliche Zahlen anwenden ließ.

Die Worte oder Benennungen der Zahlen will Ich nun ferner aus der Acht lassen, und will Dir nur erklären, wie Ich schon mehrmals gethan habe, auf welche Weise man in Erfindung bequemer Zif-

ferarten (Calculorum) verfahren müsse. Eine **Zifferart** nenne Ich ein vollständig System oder eine solche Einrichtung von gewissen Ziffern, daß dadurch alle mögliche Zahlen können ausgedrückt werden.

Welche Zahlbegriffe mit neuen Zeichen sollten belegt werden, war willkührlich. Man nehme gleich den Begriff der **Zwei** heißt, und erfinde erst alsdann wieder ein neues Zeichen, wenn mit den nun vorhandnen und durch deren Verbindung sich nicht weiter ein folgender Begriff ausdrücken lässet; welches alsdenn sein muß, wenn die folgende Zahl sich zu derjenigen, die durch das nächst vorher angenommene Zeichen ausgedrückt wird, so verhält, als die durch das erste Zeichen ausgedrückte Zahl zur Einheit. Bezeichnet das erste neue Zeichen das Gedoppelte der Einheit: so muß jedes der weiter erforderlichen Zeichen das Gedoppelte des Werths werden, den das nächstvorhergehende hat. ♀ sei Unser Zeichen, das, nach Unsrer jetzigen Zifferart, 2 bedeutet. Dann ist ♀ 1 = 3. Weil aber kein Zeichen mehr, als ein einzig Mal kann gebraucht werden, muß man gleich wieder ein neues für die Zahl 4 erfinden, oder für zwei Mal zwei. Das neue Zeichen sei ♃. Dann ist:

♃ = 4	♄ = 8	♄♃ = 12
♃1 = 5	♄1 = 9	♄♃1 = 13
♃♀ = 6	♄♀ = 10	♄♃♀ = 14
♃♀1 = 7	♄♀1 = 11	♄♃♀1 = 15

u. s. w.

Man

Man nehme den Zahlbegriff **Drei**, ihn, und immer das Dreifache des Werths vom nächſt vorhergehenden Zeichen, durch ein neues Zeichen auszudrücken: ſo iſt, wenn man Alles in Unſre gebräuchliche Zifferart überſetzet:

1	=	1	♀♀1	=	7	♄♀	=	12
11	=	2	♀♀11	=	8	♄♀1	=	13
♀	=	3	♄	=	9	♄♀11	=	14
♀1	=	4	♄1	=	10	♄♀♀	=	15
♀11	=	5	♄11	=	11	♄♀♀1	=	16
♀♀	=	6						

u. ſ. f.

So kann man mit jedem Zahlbegriff, oder jeder Sammlung von Einheiten, fortfahren, ſie durch ein neues einfaches Zeichen auszudrücken, und dann durch regelmäßige Verbindung der angenommenen Zeichen eine vollſtändige Zifferart zu bilden.

Es iſt aber nicht durchaus dabei nothwendig, daß die Anfangs gebrauchte Regel durch die ganze Zifferart unverändert in Erfindung neuer Zeichen beobachtet werde: ſondern es iſt genug, wenn nur im Ganzen eine Gleichförmigkeit da iſt, die auch zugleich auf mehrern Regeln beruhen kann. So haben z. E. die Römer in ihrer Zifferart erſt das Zeichen der Einheit viermal wiederholet: I, II, III, IIII; das folgende Zeichen V aber nur Einmal gebrauchet; dann das nächſt folgende X wieder viermal wiederholet und das folgende L nur Einmal gebrauchet; und ſo, gerade in ordentlicher Abwech-

selung, bald ein Zeichen vier- bald nur Einmal gebrauchet; wodurch sie freilich die Absicht ausgeführt haben, ihre Zifferart mit der bis aufs Zehnfache eingerichteten Zählart in Vergleichung zu setzen.

Aber es kann jeder Begriff der geraden Mehrheit schon allein durch den Platz, worinn das Zeichen der Einheit stehet, ausgedrückt werden. Ich sage nur von der geraden Mehrheit: weil die erste Zahl, die mehr als Eins, gerade ist, und dann, der Gleichförmigkeit wegen, jedes folgende höhere Fach das Gedoppelte des nächst vorhergehenden, also auch eine gerade Zahl, enthalten muß. Dadurch wird jedoch eine vollständige Zifferart bestimmt. Denn die gesammten ungeraden Zahlen finden in dem untersten Fach die Einheit, welche in ihnen noch zu ihrem geraden Theile hinzukömmt. Diese Zifferart ist nur einzig, heißet von ihrer Haupteigenschaft die **Rechnung durchs Zwiefache** (Calculus Dyadicus,) auch die **Rechnung mit Eins und Null**; weil außer den Zeichen der Einheit, nur noch eins, zu Bezeichnung des leren Platzes, erforderlich ist, wozu man die Null gebrauchen kann. Man drücket in ihr die Zahlen folgendermaßen aus:

1 = 1	101 = 5	1001 = 9
10 = 2	110 = 6	1010 = 10
11 = 3	111 = 7	1011 = 11
100 = 4	1000 = 8	1101 = 12 u. s. f.

Beide Arten, durch besondre Zeichen und durch den Platz die Vielheit auszudrücken, lassen sich bequem mit einander verbinden; wodurch mancherlei

und

und unzählliche Zifferarten entstehen; je nachdem ich mehr oder weniger Zahlbegriffe durch einzelne Zeichen darstelle, und darnach dem Platz, worinn sie gesetzt werden, einen verschiednen Werth beilege.

Unsre gewöhnliche Arabische Zifferart ist eine solche, bei der die ersten Zahlen durch die Dir bekannten einfachen Zeichen ausgedrückt werden, der Platz aber den Werth des Zehnfachen hat.

Will man auf gleiche Weise nur den beiden ersten Zahlen die Zeichen 1 und 2 geben: so wird der Platz Drei bedeuten müssen. Dadurch entsteht folgende **Rechnung durchs Dreifache** (Calculus Triadicus.)

1 = 1	20 = 6	101 = 10
2 = 2	21 = 7	102 = 11
10 = 3	22 = 8	110 = 12
11 = 4	100 = 9	111 = 13 u. s. f.
12 = 5		

Eine **Rechnung durchs Vierfache** (Calculus Tetradicus) wäre aber diese:

1 = 1	11 = 5	21 = 9	31 = 13
2 = 2	12 = 6	22 = 10	32 = 14
3 = 3	13 = 7	23 = 11	33 = 15
10 = 4	20 = 8	30 = 12	100 = 16 u s. f.

Lässet man, um auch ein Exempel zu haben, wobei mehrere Zahlen, als bei Unsrer gewöhnlichen Zifferart, mit einfachen Ziffern bezeichnet werden,

nach

noch 10 = ♄, 11 = ☿ sein: so entstehet diese Rechnung durchs Zwölffache:

10 = 12	19 = 21	90 = 108
11 = 13	1♄ = 22	☿0 = 132
12 = 14	1☿ = 23	♄00 = 1440 u. s. f.
13 = 15	20 = 24	

Du siehest hieraus, daß es sehr leicht ist, sowohl auf die eine als auf die andre Weise, da man bloß durch neue Zeichen die Mehrheit der Anfangs angenommenen ausdrücket, und da man auch zugleich dem Plaz einen Werth giebet, neue Ziffer- oder Rechnungsarten zu erfinden. Auf beide Weise läßt sich jede mögliche Rechnungsart darstellen; außer daß keine Dyadik dort Statt finden kann, wo man wenigstens den Begriff von Zwei durch ein einfaches Zeichen ausdrücken muß, und folglich den Werth des Zweifachen dem höhern Plaz nicht geben kann. Doch hat man, im Betracht auf alle dreierlei Zifferarten, eine gedoppelte Dyadik, eine gedoppelte Tetradik, u. s. f.

Die Dyadik hat Leibnitz erfunden. Auch hat er, so wie noch neulich Lambert, (*) gezeiget, wozu man sie bequem gebrauchen könne. Die Tetradik hat Weigel, der sie aber lieber Tetraktyn, oder Tetraktyk, weil er das in ihr gefunden zu haben glaubte, was Pythagoras unter dem Namen verstanden, nennen wollen, in den

(*) In seinen Zusätzen zu den Logarithm. und Trigonometr. Tabellen, a. d. 36 u. ff. SS.

den Gang zu bringen gesuchet. Um soviel weniger wird jetzt eine andre Rechnung, als Unsre Dekadik, die einmal durchgängig, vermuthlich so wie ein Volk das Rechnen von dem andern gelernt hat, angenommen ist, in den Gang kommen, als Unsre Sprache auch darnach eingerichtet ist, und eben deswegen uns bei einer andern Rechnung der Gebrauch beschwerlich fällt; weil Wir, um die ausgedrückte Zahl zu benennen, erst selbige in Unsre Dekadik übersetzen müssen; ohne Namen der Dinge aber wenige Leute denken können.

Vormals sollen jedoch die **Chineser** die **Dyadik** gekannt und gebraucht haben. Ein andres Beispiel habe ich neulich in **Gatterers** historischem Journal im 12. Theil gefunden, alwo, aus den Nov. Actis R. Societat. Scient. Vpsal. Vol. II, und zwar aus *Lindhemii* de diuersa Origine Finlandor. et Lappon. Obseruatt., angeführt wird, daß gewisse Völker (Man siehet nicht recht, ob von den **Lappländern** und **Finländern**, oder bloß von den **Samojeden** die Rede ist.) sonst nur bis Neun gezählt, und seitdem erst bis Zehn zu zählen angefangen haben, daß sie mit den **Russen** in nähere Verbindung gekommen sind. Wie ihre Ziffernart, falls sie überhaupt ordentlich gedacht haben, und ihre Begriffe nicht überhaupt, wie wohl glaublich ist, nur bis auf die Neun eingeschränkt gewesen sind, müssen beschaffen gewesen sein, überlasse Ich Dir für jede Zahl zu bestimmen. Von einem gewissen **Thrakischen** Volke erzählt **Aristoteles**, (*) daß

D es

(*) Problem. Sect. XV. Probl.

es nur bis auf Vier gezählt habe; worunter man aber keine Tetradik sich gedenken muß. Denn, setzt er hinzu, die Leute können, gleich den kleinen Kindern, sich keinen Begriff von einer Vielheit oder Menge machen, und brauchen überhaupt auch nicht viel.

Nach der Dyadik des **Leibnitz** kannst Du leicht eine sehr große in Unsrer Dekadik angegebne Zahl ausdrücken: wenn Du Dich der Tafel (*) bedienen willst, die Ich hier angehängt habe. Suche in selbiger diejenige Zahl in dem Fach der Dekadik auf, welche der gegebnen Zahl am nächsten kömmt, ohne sie zu übersteigen: so zeigt Dir die darneben im Fach der Dyadik befindliche Zahl das wievielste Fach derselben das höchste sei, worin eine 1 zu setzen, deren darneben angezeigter Werth von der gegebnen Zahl abzuziehen ist. Der Rest wird auf gleiche Weise durch die niedrigern Fächer ausgedrücket, bis die ganze Zahl dargestellt worden. Z. E. bei 35,351 zeiget mir die nächst kleinere Zahl 32,768 das 16. Fach in der Dyadik an, daß nämlich dort die Einheit besagte Zahl ausdrücke. Ich merke mir also, nach hingesetzter Einheit, mit Punkten noch 15 niedrigere Fächer, ziehe darauf von der

ganzen Zahl: - -	35,351
die schon ausgedrückten - -	32,768
ab, und suche für den Rest von	2,583
weiter nach. Das Mir durch	2048
angegebne 12te Fach läßt wieder übrig	535
Das 10te Fach gilt - -	512
Es bleiben übrig - -	23,

die

(*) I. Tafel.

die durch das 5te, das 16 gilt, und durch das 3te, 2te und 1. Fach, welche 7 zusammen betragen, ausgedrücket werden. Die ganze Zahl ist nunmehr diese:

1000101000010111.

Diese Art, in Ausdrückung einer Zahl nach der Dyadik, zu verfahren, ist wohl so bequem, als diejenige, die **Lambert** (*) angegeben, und der von demselben auch angeführte **Brander**, (**) daß man nämlich die gegebne Zahl durch 2, und den Quozienten wieder durch 2, und so fortan, so lange ein Quozient zu theilen da ist, theilen, bei jeder Theilung aber, so oft ein Rest bleibt, eine 1, und, wenn alles aufgeht, eine 0 hinsetzen solle; dadurch denn die gegebne Zahl, wenn ich die gefundnen Einer und Nullen rückwärts aufschreibe, dyadisch ausgedrückt ist. Der Beweis von diesem lätztern Verfahren ist leicht einzusehen. Denn Ich kann Mir ja gedenken, es läge die ganze gegebne Zahl in dem allerunterstten Fach, z. E. 141 mit so vielen Stücken oder Einheiten. Davon trage Ich ins nächst höhere Fach, wo die Einheit zwei Einheiten des untersten Faches gilt, so viel hinüber als angehet; da denn nie mehr als eine 1, zurück und übrig bleiben, aber auch alles in das höhere Fach hinübergehen kann, welches in demjenigen, was es

 bekom-

(*) In den Zusätzen zu den Logarithm. und Trigonom. Tab. a. d. 38. S. § 36.

(**) In der Arithmetica Binaria oder Dyadica, d. i. die Kunst nur mit zwei Zahlen zu rechnen. Augsburg 1770. in 8.

bekommen, nur die Hälfte der Stücke hat, die eben diese Größe im alleruntersten Fach ausdrückten. Wie sich aber das allerunterste Fach zu dem nächst höhern verhält; so verhält sich dieses wieder, und gleichfalls jedes andre Fach zu seinem nächst höhern. Das ganze Verfahren geschiehet folgendermaßen:

					Dyadik.
1 Fach	141	=	140 † 1	. . .	1
2 —	$\frac{140}{2}$	=	70	. . .	0
3 —	$\frac{70}{2}$	=	35 = 34 † 1	. . .	1
4 —	$\frac{34}{2}$	=	17 = 16 † 1	. . .	1
5 —	$\frac{16}{2}$	=	8	. . .	0
6 —	$\frac{8}{2}$	=	4	. . .	0
7 —	$\frac{4}{2}$	=	2	. . .	0
8 —	$\frac{2}{2}$	=	1	. . .	1

Die Zahl ist = . . 10001101.

Unsre dyadische Tafel kann auch bequem, so wie Ich sie eingerichtet habe, zu allen Zifferarten gebraucht werden, deren Fächer durch eine Dignität, der 2, das ist durch eine Zahl anwachsen, die aus der Multiplikazion mehrer 2 in einander entstanden. Weil aber nur in ihr angezeiget wird was die Einheit in jedem Fache gilt: so bedarf man noch einer andern Berechnung darneben, was nun jeder andre durch ein einfaches Zeichen ausgedrückte Zahlbegriff in jedem Fach anzeiget. Für die

Tetra-

Tetradik findest Du diese Berechnung in der IIten Tafel.

Die Dyadik des Leibnitz ist an sich sehr leicht. Man brauchet nur 1 und 1 zusammen rechnen, und 1 von 2 abziehen zu können: so hat man das Addiren und Subtrahiren schon ganz gefasset. Eine Multiplikazion und eine Division giebt es aber bei ihr eigentlich gar nicht: weil immer die zu multiplizirende Größe nur Einmal zu nehmen, und denn nur in das rechte Fach zu setzen ist; auch, so wie der Divisor immer entweder bloß die Einheit in Verbindung mit der Einheit höherer Fächer oder eines höhern Faches, oder mit einer oder mehrern Nullen sein muß, der Quozient auch nie eine andre Ziffer, als die Einheit und die Null, bekommen kann. Diese Rechnungsart sollte also zur Bequemlichkeit aller derer eingeführt werden, die das Einmalein von Natur hassen, weil sie es nicht fassen können.

Jede Rechnungsart unter Unsrer Dekadik, das ist, die nicht so weit, als selbige, zählet, ist leichter als selbige; ihr Einmalein ist immer kürzer, je weniger Einheiten ihre höchste einfache Ziffer begreifet. Dagegen aber bedarf man immer mehr Ziffern und mehr Fächer eine Zahl auszudrücken. Jede Rechnungsart über Unsrer Dekadik ist kürzer im Ausdruck als selbige; hat aber ein schwerer Einmalein; je größer die Begriffe sind, die in ein einfaches Zeichen gefaßt worden.

Wir haben schon oft versucht, mit andern Zifferarten, als mit Unsrer Dekadik und der Römischen

Hemidekadik, zu rechnen: also weist Du nun, daß man gar wohl ein Mathematikus sein könnte, ohne daß man, in gewissem Verstand, Drei oder Fünf zu zählen wüste; welches sonst im Sprichwort als das Kennzeichen eines Dummkopfs pflegt angegeben zu werden.

Ich will jetzt nicht alles erschöpfen, was Ich schon, in Absicht auf den Algorithmus, Dich gelehrt habe. Immer gehen Wir weiter darin fort, die Ursachen aufzufinden, warum etwas so, und nicht anders, sein müsse; warum dieses Bestimmte, und nichts anders, folge. Durchaus bei Allem in der Mathesis must Du nach dem Grunde fragen. So behauptest Du denn mit Recht den Ehrennamen, den Dir ein so rechtschaffner als gelehrter Mann, schon vor einigen Jahren, beigeleget hat, damit er auch noch jetzt Dich den kleinen Philosophen zu nennen pfleget. Was Du begreifen kannst und Mir selbst bekannt ist, entdecke Ich Dir gern. Freilich kömmt denn noch immer viel vor, weswegen Ich Dich zur Geduld verweisen muß. Mit der Zeit wollen Wir aber auch schon, bei Unsrer Rechenkunst, zu denen Büchern des **Euklides** kommen, die nicht viel mehr pflegen gelesen zu werden, imgleichen zu den neuern großen Meistern, **Segner, Euler** und Andern.

Bei Unserm gegenwärtigen Unterricht suche Ich Dir manches Buch bekannt zu machen: obgleich Wir Uns bei denen, die eigentlich die ganze Rechenkunst verhandeln, nicht an ein ein einziges binden, sondern die Exempel, die Wir etwa brauchen,

chen, bald aus diesem, bald aus jenem hernehmen. Vorzüglich aber hat Dir doch **Haupts** Anleitung zu den arithmetischen Wissenschaften, wegen der artigen anmuthigen Exempel gefallen, die darin enthalten sind. Es giebt auch dieses Buch an sich eine sehr vernünftige Anweisung zur gemeinen Arithmetik, daher es längst solche Tröster, als **Lambeck** und **Heins**, die weiter zu nichts, als zu Exempelbüchern, dienen können, aus den Schulen verdrängt haben sollte. Wiewohl bei ihm der Exempel nur wenige sind; daher ich schon gedacht habe, daß Wir beiläufig Uns, aus der alten und neuen Geschichte, imgleichen aus Reisebeschreibungen, noch mehrere Exempel sammeln wollten, sobald der Himmel der leidigen Zanksucht kräftig steuret, und Uns doch das nöthige Brod nicht fehlen lässet.

Sehr oft erfährest Du beim Rechnen, daß Du Dich geirret habest. Damit Du also gewiß werdest, daß Du allen Irrthum vermieden und recht gerechnet habest; so **mache davon gleich das Umgekehrte**, welches man **die Probe machen** nennet. Das Addiren und Subtrahiren sind so, wie das Multipliziren und Dividiren, von einander das Umgekehrte. Was das Eine verbindet, wird durch das Andre getrennt, und was das Eine trennt, wird durch das Andre verbunden. Beim Addiren wird jedoch die Probe durchs Subtrahiren oft beschwerlich. Das Beste beim Addiren ist allemal, daß man beim Zusammenzählen der Theile Einer Art oder Eines Fachs nach einander verschiedne Wege gehet; wenn man z. E. erst die Reihe herun-

ter gegangen ist, alsdann wieder dieselbe Reihe von unten hinaufgehet. Eine dabei oft angeführte Probe von 9 taugt gerade nichts; wie ich Dir gezeigt habe.

Nach und nach sollst Du mehrere Arten zu Multipliziren und zu Dividiren lernen. Manches, was man darüber ausgesonnen hat, ist doch sinnreich, und kann Dein Nachdenken stärken: wenn man gleich nicht allemal wesentlichen Vortheil dadurch in der Anwendung beim Rechnen erhält.

Was Prim- oder Grundzahlen sind, habe Ich Dir schon vorhin erkläret. Noch eine Weile bleibe Ich Dir den Beweis schuldig, daß zusammengesetzte Zahlen nicht in gewisse und dann zugleich auch in andre Primzahlen aufgelöset werden können. Mit der Auflösung selbst aber, die uns bei der Lehre von den Brüchen unentbehrlich ist, weist Du schon gut genug Dich zu behelfen. Ich habe Dir nämlich nachgewiesen, daß Du im 2ten Bande des mathematischen Lexikons, in Poetii Anleitung zu der arithmetischen Wissenschaft vermittelst einer parallelen Algebra, und in Lamberts Zusätzen zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen ganze Tafeln darüber finden kannst, wovon die im läztgenannten Buche die vollständigsten sind, indem sie bis auf 102000, die andern aber nur bis auf 10,000, gehen. Alle diese Tafeln aber enthalten nicht durchaus alle einzelne Zahlen, die in der Menge begriffen sind, welche sie zu untersuchen vorgenommen haben, sondern ein Verfasser hat mehr, und

der andre weniger, die Zahlen ausgeschlossen, die sich durch 2, 3 und 5 auflösen lassen. Wie hilft man sich nun da? Giebt es nicht Regeln, wornach ich sogleich einer Zahl ansehen kann, durch welche der drei besagten Primzahlen oder durch welche andre Zahl sie sich heben lässet? Du hast sie Dir schon gemerkt; und ich darf nur in den Beweisen über ihre Richtigkeit Dir zu Hülfe kommen.

Alle gerade Zahlen, und keine andre, lassen sich durch Zwei heben. Diejenigen Zahlen aber sind gerade, deren lätzte Ziffer gerade ist. Denn alle Zehner, und eben so alle höhere Ordnungen der Zehner, sind gerade. Folglich kömmt es nur auf die Zahl im Fach der Einheiten an, ob selbige gerade ist.

Lässet sich Zehn, und folglich jedes Vielfache von Zehn, und folglich jede höhere Ordnung der Zehner, durch Fünf heben: so wird sich jede Zahl durch Fünf heben lassen, die entweder Nichts, nämlich eine 0, oder eine 5 im Fach der Einheiten hat. Es wird aber auch die Fünf keine andre Zahl heben können, weil sie keine von den neun ersten Zahlen hebet, als sich selber.

Damit Ich Dir deutlich mache, welche Zahlen durch Drei können gehoben werden, wollen Wir erst die Neun betrachten. Diese ist Eins weniger als Zehn. Folglich muß bei jeder Zehn, die Ich durch Neun theile, Eins übrig bleiben. Auch bei jeder höhern Ordnung der Zehn, bei jedem 100, z. E. bei jedem 1000, u. s. w. bleibt Eins der zunächst niedrigern Ordnung übrig; welcher Rest sich

wieder so weit theilen lässet, daß eine schlächte Einheit übrig bleibet. Es ist also in jeder Zahl, die über 9 gehet, die Neun oder eine gewisse Anzahl der Neun, und ein solcher Ueberschuß an Einheiten enthalten, als die in jedem Fach befindliche Ziffer anzeiget. Also darf man nur diese Ziffern zusammenzählen; und ist ihre Summe durch 9 theilbar: so muß auch die ganze Zahl durch 9 theilbar sein. Z. E. 61783254 ist durch 9 theilbar, weil 6†1†7†8†3†2†5†4=36, durch 9 aufgehet.

Alle Zahlen, die durch Neun können getheilt werden, können auch durch Drei getheilt werden; weil 9 durch 3 theilbar ist. Jener Ueberschuß bei der Zehn über 9 sei nun 3 oder eine gedoppelte 3: so wird ihn dennoch die 3 heben; wenn gleich die 9 ihn nicht heben kann. Also muß, wenn bei jenem Zusammenzählen der Ueberschüsse über 9, oder beim Zusammenzählen des Werths der einzelnen Ziffern einer Zahl, diese Summe durch 3 theilbar ist, die ganze Zahl durch Drei theilbar sein.

Da in unsrer Dekadik keine Mehrheit der 9 sich anders, als durch Zehn und den Ueberschuß über selbige, oder durchs Zehnfache und dessen Ueberschuß ausdrücken lässet; die Ziffer aber, welche die Zehn und das Zehnfache anzeiget, allemal den Ueberschuß der einen und des andern über die 9 oder das Neunfache ergeben muß: so siehet man leicht, daß kein Vielfaches der 9 möglich sein kann, bei dem sich nicht die angegebne Eigenschaft findet, daß nämlich die Summe ihrer Ziffern sich durch 9 müsse heben lassen.

Die-

Diejenige Mehrheit der 3, die nach 9 abgetheilt werden kann, muß mit 9 und dem Neunfachen gleiche Eigenschaft haben. Was aber die andern, und überhaupt alle Mehrheiten der 3 betrifft, so wissen Wir erst, daß die gesammten Fakta der 3 durch die eilf ersten Zahlen solche Ziffern ergeben, deren Summe durch 3 theilbar ist. Dann sind, wenn der andre Faktor aus zweien Zahlen bestehet, oder auch etwas im Fach der Zehner hat; es mag nun, durchs Multipliziren beim Fach der Einheiten, eine 1 oder 2 zum folgenden Fach hinüberkommen, nur das Dreifache der 3 und der 6 im Fach der Zehner, welche mit jener 2 und 1 etwas zum Fach der Hundert hinübergeben können; daß also bei den übrigen 7 Ziffern allen, die Zehner ausdrücken, die Ziffern für das Faktum der Zahl von 2 Fächern gerade dieselben bleiben, welche die Multiplikazion jede der Ziffern des Faktors einzeln genommen ergab. Steht im Fach der Hundert beim Faktor eine 3: so ist Unser Beweis gleich fertig. Denn so oft zu 3, 3=9 eine 1 hinzukommt, wird durch die daraus erwachsende 10 Unsere Charakteristik gar nicht geändert; sondern es bleibt die Ziffer 1, wie sie schon vorhin da war. Wird aber der 9 eine 2 hinzugethan: so erscheint selbige in der 11 ungetheilt für unsere Charakteristik. Es ist aber alsdann nicht möglich, daß mehr, als eine 1, ins Fach der Tausende hinübergehen kann. Ist 6 im Fach der Zehner: so mag nur die aus dem Fach der Einer zu 3, 6 = 18 hinüberkommende 2 auf das Fach der Hunderte zu wirken. Aber alsdann kömmt wieder dieselbe 2, die schon vorher da war.

Diese

Diese etwas mühsame Betrachtung die auf jedes der höhern Fächer und auf jede höhere Ordnung der Zehn anzuwenden ist, kann Dich überzeugen, daß es durchaus keine andre Mehrheiten der 9 und der 3 gebe, als die obgedachtes Kennzeichen aus der Summe ihrer Ziffern haben; folglich eine jede Zahl, wobei sich dieses Kennzeichen nicht findet, weder durch 9 noch durch 3 theilbar sei.

Alle Zahlen, die sich durch 3 und zugleich durch 2 heben lassen, sind auch durch Sex theilbar. Was aber durch 6 kann getheilt werden, muß durch dessen Primzahlen 2 und 3 theilbar sein.

Jedes Hundert ist durch Vier theilbar; aber keine Zehn. Also darf Ich nur untersuchen, ob dasjenige, was im Fach der Zehner und der Einheiten stehet, oder ob die beiden läßten Ziffern, als Eine Zahl betrachtet, durch 4 theilbar sind; damit Ich erfahre, ob die ganze gegebne Zahl durch 4 theilbar sei.

Vielleicht möchte man denken, daß, zur Versicherung, ob auch keine Mehrheit der Vier sonst, als auf welche das angegebne Kennzeichen passe, möglich sei, alle Fakta der 4 durch jede Zahl bis auf 99 einzeln untersucht werden müssen: allein Wir können dabei kürzer verfahren 4, 24 = 96 giebet noch nichts zum Fach der Hunderte hinüber. 4, 25 aber ist gerade 100. 26 ist = 25 † 1. Alle Fakta bis auf 50, 4 bleiben nun wieder unter 200. 51 = 50 † 1; 52 = 50 † 2 u. s. w. 300 ist erst = 75, 4. 99, 4 aber ist 396 und noch unter 400. Folglich muß jedes Vielfache der 4, wenn

es

es in seinen beiden untersten Fächern, oder in Einem derselben, eine zahlbedeutende Ziffer hat, so beschaffen sein, daß die 4 was in diesen untersten Fächern befindlich ist hebe.

Von den Hunderten sind nur die geraden durch Acht theilbar. Bei den ungeraden bleibt allemal eine 4 übrig. Also darf Ich, wenn bei einer Zahl die Hunderte gerade sind, nur untersuchen, ob, was im Fach der Zehner und der Einheiten steht, sich durch 8 heben lasse, darnach zu bestimmen ob die ganze Zahl durch 8 theilbar sei. Sind aber ungerade Hunderte da; so muß zu dem, was in den besagten beiden Fächern stehet, noch 4 gethan werden, und dann die Summe durch 8 theilbar sein.

8, 12 = 96 ist noch unter 100 und um 4 geringer, die bei 13 = 12 † 1 wenn es mit 8 multiplizirt wird, in Anschlag kommen müssen; daher die beiden niedrigern Fächer, wenn das Faktum auch Einhundert hat, nur 8, X — 4 enthalten können. Derselbe Schluß geht fort bis auf 8 ⋈ 24 = 192. 8, 25 = 200. Alle folgende Zahlen bis 37 lassen sich als 25 † X betrachten. 37, 8 aber ist = 296 = 300 — 4. Nun gehe man mit denselben Schlüssen bis 50, 8, bis 62, 8 bis 75, 8 und so weiter fort, bis man endlich bei 125 ⋈ 8 auf 100 komme: so wird man überzeugt werden, daß, da jede höhere Mehrheit der 8 der Zahl (125 † X) 8, oder (125, y † x) 8, gleich sein muß, alle die Fakta davon, wo X, 8 durch die 3 niedrigsten Fächer auszudrücken sind, durchaus Unser angegebnes Kennzeichen haben müsse.

Von

Von der Zehn und jeder Ordnung derselben darf ich nicht viel sagen. Bei Unsrer Dekadik ist eine Zahl durch 10 getheilt, wenn ich sie aus dem Fach der Zehner ins Fach der Einer heruntersetze; und eben so verhält sichs mit den höhern Ordnungen der Zehn. Also darf Ich nur die am Ende bei einer Zahl vorhandnen Nullen insgesammt wegstreichen; dann wird sie bei Einer 0 durch 10, bei 2 Nullen durch 100 u. s. w. dividirt sein.

Umgekehrt kann auch nichts ein Vielfaches der 10, als was am Ende eine Null, oder ein Vielfaches der 100, als was am Ende 2 Nullen hat, u. s. f. sein.

Die Regel für die Eilf ist etwas künstlich: aber Du hast sie so leicht, als die übrigen alle, begriffen. Besteht die Zahl nur aus zweien Ziffern: so sind alle die Zahlen, die völlig gleiche Ziffern haben, durch Eilf theilbar. 88 = 8, 11. 99 = 9, 11 u. s. f. Hat aber die Zahl Ziffern aus den 3 untersten Fächern: so muß jede Zahl sich durch 11 heben lassen, deren mittelste Ziffer gleich ist der Summe der beiden äußersten. 231 zum Exempel ist = 220 † 11 = 11, 20 † 11.

Hat die Zahl mehrere Fächer: so bedenke daß $\frac{100}{11} = 9 \dagger \frac{1}{11}$; daß die 10,000 = 100,100; (da auch 100 = 99 † 1) = 9900 † 100 folglich = 9999 † 1. So muß nun bei jeder durchs Hundertfältige aufsteigenden Einheit eine Ein überschießen. Wenn Ich aber bei der 1 im Fach der Einheit auch denke, daß sie überschieße; kann Ich die Regel allgemein so bilden, daß bei jedem ungeraden

den Fach Unsrer Dekadik, beim Dividiren durch 11, für die Einheit eine 1, und für jede andre in solchem Fach befindliche Ziffer dasjenige überschiessen müsse, was die Ziffer selbst anzeiget. Die gesammten in den ungeraden Fächern einer Zahl befindlichen Ziffern zusammengenommen sind also wie eine Zahl anzusehen, die aus einem Fakto von 11 und überdem aus so vielen Einheiten bestehet, als die Summe der besagten Ziffern ergiebet. Wenn daher bloß in den ungeraden Fächern bei einer Zahl bedeutende Ziffern sind, und deren Summe durch Eilf theilbar ist: muß die ganze Zahl durch 11 theilbar sein. Z. E. 208010605 ist durch Eilf theilbar; weil $2 + 8 + 1 + 6 + 5 = 22 = 11, 2$.

Nehme ich die graden Fächer einer Zahl: so fehlt Mir allenthalben eine Ein. $10 = 11 - 1$. $11 = 10 + 1$. $1000 = 100, 10 = (99 + 1) 10 = 990 + 10 = 11, 90 + 10$; folglich fehlt wieder 1. So kann ich bei jedem Fach fortschließen, das das Hundertfache der 1000 u. s. w. enthält. Es müssen daher bei jedem der geraden Fächer so viel Einheiten fehlen, als die Ziffer anzeigt, die in dem Fach stehet; und die Summe aller dieser Ziffern muß Mir die gesammten fehlenden Einheiten ergeben. Daher kann Ich Mir die in den geraden Fächern einer Zahl stehenden Ziffern vorstellen als $x, 11 - y$; und wann y durch 11 theilbar ist: muß die ganze Zahl, die nur in den geraden Fächern bedeutende Ziffern hat, durch 11 theilbar sein. Z. E. $4070108020 = x, 11 - (22 = 11, 2)$

Sind

Sind sowohl in den ungeraden als in den geraden Fächern bedeutende Ziffern: so kann eine solche Zahl in zwei Theile zerlegt werden, deren einer die geraden Fächer, und der andre die ungeraden enthält. Z. E. $782112606 = \begin{cases} 702010606 \; + \\ 80102000 \end{cases}$; und dann muß wieder die Theilbarkeit der ganzen Zahl folgen: wenn bei jedem der beiden Theile das gedachte Kennzeichen Statt findet.

Gesetzt aber, es würde alsdann die Summe der Ziffern des einen Theils durch 11 nicht ohne Rest getheilet: so muß dennoch, wenn bei der Theilung der Summe der Ziffern des andern Theils eben so viel übrig bleibt, die ganze Zahl auch durch 11 theilbar sein. Denn was bei dem einen Theil zu viel war, das fehlt beim andern; und umgekehrt. $x, 11 + 14 + y, 11 - 25 = (x + y)\, 11 + 11 + 3 - 2, 11 - 3 = (x + y + 1)\, 11 - 2, 11 = (x + y - 1)\, 11.$ Z. E.

$$4773692 = \begin{cases} 4070602 = 19 \\ 703090 = 19. \end{cases}$$

$$\text{und } 10605041276203 \begin{cases} = 13 = 11 + 2 \\ = 24 = 11, 2 + 2 \end{cases}$$

Den Beweis will ich hier weglassen, daß durchaus jedes Faktum der 11 das besagte Kennzeichen haben müßte.

Von der bösen Sieben habe Ich Dir nichts gesagt: weil alle Kennzeichen, die man angiebt, daß eine Zahl sich durch 7 heben lasse, bei der Untersuchung zu viel Mühe, und nicht den geringsten Vortheil schaffen.

In des von Clausberg demonstrativer Rechenkunst findet man auch noch ein Kennzei-

chen für fünf und zwanzig, und für Hundert und fünf und zwanzig. Es ist leicht ersichtlich, da jedes Hundert durch 25 und jedes Tausend durch 125 theilbar ist, sich jede Zahl, deren beide läzte Ziffern durch 25 theilbar sind, durch diese Zahl, und jede Zahl, deren drei läzte Ziffern durch 125 theilbar sind, durch diese Zahl heben lassen müsse; statt der bedeutenden Ziffern aber in den beiden oder dreien untern Fächern auch Nullen stehen können.

Ich wüste nicht, daß man auch noch für andre Prim- oder zusammengesetzte Zahlen dergleichen Regeln erfunden hätte. Zur Bequemlichkeit könnten sie wahrscheinlich auch nicht viel dienen. Sinne aber demnächst mal nach, ob Du ein Kennzeichen auffinden könnest, was für Zahlen sich z. E. durch 13 heben lassen.

Die Anwendung der hier gegebenen Regeln auf die Römische Rechnungsart ist leicht; nur daß Ich zween Umstände bemerke. Zu finden, ob eine Zahl gerade sei oder nicht, ist nicht genug, daß Ich auf das Fach der I sehe; weil VII ja II und VI nur I dort hat: sondern Ich muß immer das Fach von V. zugleich mit betrachten. Bei den Theilern Drei und Neun muß Ich für jedes dieser dreier Zeichen D, L und V, und für jedes der höhern Fächer, die von diesen 3 Zeichen mit ihre Benennung haben, Fünf rechnen: So ist IIMDCCCLXXXXVIII durch III und durch VIIII theilbar: weil bei obgedachtem Zählen Sieben und Zwanzig herauskommen.

Auch davon haben Wir geredet, wie sich die hier gegebnen Regeln auf andre Rechnungsarten, nämlich auf die Tetradik Pentadik und andre, anwenden lassen.

Bei der Dyadik des **Leibnitz** siehet man leicht, daß alle Zahlen, die am Ende eine Null haben, durch 10 oder 2 theilbar sein müssen; imgleichen, daß, soviel auch Nullen am Ende sind, selbige insgesammt können weggestrichen werden; da denn die Zahl durch ein solch Faktum der Zwei dividirt ist, als durch die Einheit angedeutet wird, worauf eine gleiche Anzahl von Nullen folget. Es kann nämlich 1101000 durch 1000 dividirt werden. Das giebt Mir nun freilich sogleich einen gewaltigen Vortheil, daß Ich den Augenblick ersehen kann, ob eine Zahl durch 32, dnrch 64, durch 128 und s. f. theilbar ist, und ohne alle Mühe die Theilung selbst zu beschaffen vermag. Hier aber, muß Ich nur gestehen, daß meine Wissenschaft begränzet ist, und ich aus dem mich nicht recht finden kann, was **Lambert** (*) saget, daß bloß die Symmetrie, die in der Ordnung der 10 sichtbar ist, die Theiler angebe, imgleichen, daß man dabei die nicht ganz vorhandene Symmetrie durch eine leichte Verwandlung herstellen könne. Mich dünkt das sei alles denn nur Vermuthung.

Aus **Bertrands** neuer Entwicklung des elementarischen Theils der mathematischen

(*) In den Zus. zu d. Logarithm. ꝛc. Tabellen, a. d. 37. S.

schen Wissenschaft (*) habe Ich diese leichte Regel Mir gemerkt, daß bei jeder andrer Rechnungsart, die ebenfalls dem Fach, worin die Ziffer steht, einen Werth giebet, Ich untersuchen muß, welche Zahl dasselbe Verhältniß zur ganzen Einrichtung ihrer Rechnung, als eine gewisse Zahl bei Unsrer Dekadik zu selbiger, habe, um darnach die bei dieser zu Auffindung der Theiler dienenden Regeln auch dort anwenden zu können. 5 zum Exempel, ist $= \frac{10}{2}$. Also muß da $7 = \frac{14}{2}$, bey der Dekatetradik dieselbe Regel für die 7 passen, die für die 5 bei der Dekadik dienet. 1087 der Dekatetradik ist also durch 7 theilbar, so wie 20. Denn jedes höhere Fach ist ein Vielfaches der 7. Bei der Hexadik dient für die 3 dieselbe Regel, die bei Unsrer Rechnungsart für die 5 dient. Dort dient aber für die 5 dieselbe Regel, die bei der Dekadik für die 9 dient; und Unsre Regel für die 11 dient dort für die 11 oder 7. Bei der Pentadik haben Wir die 4 wie Unsre 9, die Fünf wie Unsre 10, die Sex wie Unsre 11 zu betrachten. Hingegen läßt sich dort die Regel für Unsre 5 gar nicht anwenden: weil $\frac{5}{2}$ keine ganze Zahl ist. Es bedarf nicht, daß Ich die Anwendung Unsrer Regeln noch weiter fortsetze.

Auf gleiche Weise kann man selbige aus Unsrer Dekadik auf alle andern Rechnungsarten, welche

 bloß

(*) Developement nouveau de la Partie Elementaire des Mathematiques. Geneve 1778. in 4. T. I. Ch, 5. §. 128. Pag. 75.

bloß durch neue Zeichen gewisse Vielheit ausdrücken, machen; wenn nur nach einer einzigen einförmigen Regel diese Rechnungsarten eingerichtet sind,

Vielleicht werden manchen Personen, die sich die Mühe nehmen, was Ich Dir jetzt gesagt habe, zu lesen, zwo Bedenklichkeiten darin aufstoßen, wovon die eine diese ist, daß ein noch nicht Siebenjähriger Knabe, wie Du, viele von Meinen Schlüssen nicht werde verstehen können. Darauf müssen Wir freilich antworten, daß die Erläuterungen, die Ich durch Buchstabenrechnung, imgleichen auch durch einige andre, gegeben, Dir, weil Wir Uns damit noch nicht viel beschäftigt haben, noch nicht recht verständlich sind, und Ich dabei mehr auf den künftigen Gebrauch gesehen habe. Was aber die Beweise selbst betrifft: wie sollte es Dir an Scharfsinn fehlen, sie aus einander zu setzen, und an anhaltender Aufmerksamkeit, sie zu begreifen? Wer, wie Du, 24 Gesänge der Iliade, und 24 Gesänge der Odüssee im ganzen Zusammenhange lesen und die ganze Geschichte daraus ziemlich fassen kann, der fasset heut auch wohl Einen Beweis, und morgen wieder Einen, und ein ander Mal denn nur den Theil Eines Beweises; und wird so, nach und nach, mit Allem fertig. Auf dem Schilde des Peleiden stand auch treflich viel, das der hochberühmte Hephaistes mit göttlicher Kunst darauf gebracht hatte. Wir haben aber das Bild davon so lange herumgekehrt und mit Homers Erzählung verglichen, daß Wir endlich nicht nur das ganze Kunstwerk begriffen haben, sondern

dern auch wie allenfalls ein noch bässerer Schild hätte gemacht, und mit noch mehr Dingen aus Himmel, Erde und Meer angefüllet werden können.

Die andre Bedenklichkeit, daß man von Manchem, was Ich Dich lehre, den Nutzen nicht einsehen könne, ist für Dich gar keine. Durchaus alle Kenntniß nutzet; die eine freilich mehr als die andre. Diejenige ist aber nicht immer die vorzüglichste, deren Nutzen gleich unmittelbar zu Tage liegt und uns sinnliche Bequemlichkeit verschaffet. Laß andre nur mit dem Gebrauch des Erfundnen in Trägheit zufrieden sein: Wir wollen wissen wie es erfunden worden, und ob auch alles richtig sei was man davon rühmet. Selbst das Ueben dabei im Denken und Nachsinnen giebt Fertigkeit das Wahre zu entdecken. Keine Gelegenheit etwas Gutes zu lernen, es sei was es wolle, (Gut aber ist hier alles was nicht ersichtlich böse ist; und auch von dem Bösen muß man Vieles zu gutem Gebrauch kennen.) must Du aus der Acht lassen. Weil aber der Dinge in der Welt so viele sind, und unendlich viel so lange schon geschehen ist und noch täglich geschiehet; unser Leben aber nur spannenweise Uns beschieden worden: muß freilich Unsre Beschäftigung auf Etwas vorzüglich gerichtet sein, darin oftmals die Umstände Uns die Wahlfreiheit beschränken werden, wenn sie Uns in diesen und jenen Winkel, Brod zu suchen, stoßen, doch nie Uns ganz nehmen dürfen. Immer laß vor Allem andern mit auf mathematische Wissenschaft Dein Dichten und Trachten gerichtet sein: ihr jage unaufhaltbar nach: sammle begierig von ihren

Schätzen, womit Du nie Dich wirst überladen können. Sie werden Dir nicht nur hier, im täglichen Verkehr mit Unsern Erdbürgern, gewaltigen Vortheil schaffen, manchmal auch Ruhm und Ueberfluß gewähren, sondern werden auch alsdann noch, wenn alles Irdische verschwindet, und so manche Kenntniß von Stadtrechten, Korpusjuris, Gerichtsformeln und dergleichen mehr, worauf sich jezt so viele um Uns herum brüsten, gar nichts werth sein wird, von ächter Gültigkeit sein. Denn, siehe, Wir werden auch dort, in jenem Stande unbegränzter Vollkommenheit, an einem Ort und in einem Raum Uns befinden müssen, Wesen verschiedner Art und mehrere von Einer Art um Uns haben, deren Anzahl, verschiedne Verhältnisse, Form, Ausdehnung, Kräfte, Folge des Daseins, Unserm Geist nothwendig müssen Beschäftigung geben, worauf Wir eben auch hier Uns haben mit vorbereiten sollen. Ich will Dir jedoch nicht verhalten, was mir einst ein braver Geistlicher alhier, mit dem man dergleichen Dinge noch herzlich absprechen kann, weil Er Meiner Meinung nicht beipflichten zu können vermeinte, entgegen sezte. Alles, sagte Er, was in jenem Leben, außer der moralischen Vollkommenheit, Uns werden soll, wird unendlich weit über Unsre gröste irdische Kenntniß erhaben, und, wenn auch diese bis auf **Newtons** Vollkommenheit sich hinaufgeschwungen hätte, gewiß die millionste oder noch eine höhere Potenz von selbiger sein. Ich konnte aber darauf, in demselben Gleichniß, mathematisch erwiedern, daß, in welchem Verhältniß auch himmlische und irdische

irdische Vollkommenheit mit einander stünden, dennoch von der Kenntniß, die sich hier zu Neutons seiner wie 2 zu 10 verhalten hätte, die millionste Potenz wieder überaus gewaltig unter der millionsten Potenz der seinigen stehen müste.

Hier schließe Ich wieder meinen Vortrag, worin Ich freilich Deinen Ehrgeitz stark erregt habe; das, nach der neuen Erziehungsart, gar nicht geschehen soll. Ueber dieses Kapitel begehre ich nicht, wie sehr auch mein Amt Mir das Zanken und Rechthaben geläufig macht, zu Zanken. Aber denken darf Ich denn doch, daß es mit diesem Grundsatz des Philanthropismus wohl eben so, als mit einem andern, sich verhalten möge, daß man, ohne Anwendung alles äußern Zwanges, Kinder artig, fromm und gesittet machen könne. Zuckest Du nicht selbst über dies läztere die Achsel? Und in der That ist so manches, was, zumal ein Hagestolz, aussinnet und richtig glaubt, in der Anwendung ziemlich untauglich.

Zu Ende des Jahrs 1780.

 Zweiter

Zweite Fortsetzung.

Lieber Sohn!

Abermals ergreife Ich die Feder: da Wir noch ziemlich Zeit bis zur nächsten Messe haben; und Du auch meinst, daß ein größres Buch in manchem Betracht schicklicher sein würde. Zwar muß Ich dabei Dir das Sprichwort beibringen: Ein großes Buch, ein großes Uebel: aber Unsre Abhandlung hat freilich noch lange anzuwachsen, bis ein großes Buch daraus wird; und in so fern hast Du Recht, daß, da Ich einmal unternommen, Deine Rechnungswissenschaft und Fähigkeit bekannt zu machen, sich selbige im vollkommensten Lichte zeigen muß; daher der Theil der Rechenkunst nicht länger verschwiegen werden darf, den Ich noch nicht abgehandelt habe, Du aber bereits ziemlichermaßen gefasset.

Jetzt will Ich drei Kapitel abhandeln: die Anfangsgründe der **Buchstabenrechnung**, die Lehre von den **Brüchen**, und wie man die **Wurzel ausziehet.**

I. Von der Buchstabenrechnung.

Wenn Ich etwas ausgerechnet habe, kann man, bei der ordentlichen Art, durch Ziffern Zahlen auszudrücken, aus dem Gefundenen oft nicht entdecken, welchen Einfluß jede Mir Anfangs gegebne Zahlen zu Hervorbringung des Gefundenen

nen gehabt hat. Ist das Gefundne Zwölf aus den gegebnen Zahlen 2,3,5: so hat die Zahl 12 an sich entstehen können auf folgende Weise: 2,5 † 2, oder 3,5 — 3, oder 2,2,3, oder 5 † 3 † 2 † 2, oder $\frac{2,3,5}{3}$ † 2, und noch auf mehrere. Es kann aber in Unserm besondern Falle nur eine einzige oder oder einige der möglichen Entstehungsarten die rechte sein; daß Ich also in Irrthum gerathen würde, wenn Ich, bei einem andern sonst völlig ähnlichen, aber aus andern gegebnen Zahlen bestehenden Fall, zu Erreichung gleicher Absicht, eine andre Entstehungsart gedächte. Es gehet nämlich nicht an, daß Wir bei jedem Uns vorkommenden Rechnungsfall die Schlußwahrheit, oder das Ende der Rechnung, aus den ersten Grundwahrheiten, oft durch eine Menge von Schlüssen, erst herleiten; sondern, wenn Wir das Einmal gethan und Uns das Verhältniß des Gefundnen zu den Anfangs gegebnen Zahlen, oder wie jenes aus diesen entstanden, gemerkt haben, können Wir oft eine Menge von Mittelschlüssen weglassen, und uns kürzre allgemeine Regeln bilden, die nur befolgt zu werden brauchen.

Die gegebnen Zahlen werden Uns dadurch beim Ausrechnen unsichtbar, daß Ich alsdenn auf die Anzahl der Einheiten, woraus eine jede bestehet, achte. Verrichtete Ich nämlich dasjenige, was bei den Vier Rechnungsarten geschehen muß, bloß durch Hülfe der Dir bekannten Zeichen: so könnte der Ausdruck 3,4 nicht mit dem Ausdruck $\frac{24}{2}$ ver-

 welches

wechselt werden; obgleich jeder von ihnen = 12. Bei dieser Art zu verfahren würden aber doch Unbequemlichkeiten entstehen; in so fern z. E. Ich eine Mehrheit der einen oder der andern gegebnen Zahl bekäme, und der Multiplikator gerade einer der gegebnen Zahlen gleich wäre. Ferner würde Uns manchmal noch ein Zweifel übrig bleiben, ob das Gefundne nicht etwa nur auf diese und jene bestimmte Zahlen paßte. Daher ist man auf Zeichen verfallen, welche bloß die verschiednen Zahlen oder Größen, ohne Bestimmung der in jeder begriffnen Einheiten, ausdrücken. Wenn man das Verhältniß, worin selbige, durchs Ausrechnen, nach und nach kommen, mittelst der bekannten Zeichen der Vier Rechnungsarten ausdrücket: muß die Schlußformel mir durchaus eine allgemeine Regel geben, die, zu Erreichung derselben Absicht, bei allen möglichen Fällen dient, die unter dieselbe Aufgabe gehören; wenn gleich sonst diese Fälle unter einander mit Zahlen von noch so verschiedner Größe sich ausdrücken lassen.

Es ist aber auch möglich, daß Ich Mir eine Aufgabe, die Ich nie in einem besondern Falle, und mit bestimmten Zahlen gedacht und untersucht habe, so ganz im Allgemeinen denke, alsdann nur die nothwendige Bestimmung der zu ihr erforderlichen Theile Mir merke, und endlich untersuche was aus ihnen, nach den Regeln der Rechenkunst, folgen müsse. Der Fall sei welcher er wolle, daß Wir vom Allgemeinen gleich ausgehen, oder von einzelnen Exempeln das Allgemeine abziehen: so sind

Uns noch andre Zeichen, als die Ziffern, zu Erfindung der Größe nothwendig.

Zu diesen Zeichen, welche Zahlen oder Größen im Allgemeinen ausdrücken sollen, hat man längst die Buchstaben des kleinen Lateinischen Alphabets angenommen, doch so, daß man auch die großen Lateinischen Buchstaben, imgleichen die Griechischen, u. s. f. mit zu Hülfe nimmt. Durch die erstern Buchstaben des Alphabets, nämlich durch a, b, c, u. s. f. pflegt man bekannte, und durch die läztern Buchstaben, w, x, y, z unbekannte, oder die Grössen, die man erst erfinden will, zu bezeichnen.

Soll Ich so ausgedrückte Größen zu einander Addiren, nämlich a zu b: wird solches, weil Ich, wenn sie auch sonst von Einer Art sind, auf die Anzahl der Einheiten bei einer jeden Meiner Größen nicht achten will, nicht auf andre Art, als durch das Zeichen der Addizion, geschehen können: a † b. Ist aber a zu a zu addiren: so habe ich, weil bei demselben Exempel jedes Größenzeichen immer einerlei bedeuten muß, 2 Dinge von Einer Art; und folglich ist a † a = 2 a.

Eben so ist, beim Subtrahiren, a von b nicht anders, als durch das Zeichen der Subtrakzion, abzuziehen: b — a. b von 3 b aber giebt zur Differenz 2 b.

Bestehet ein Ausdruck aus mehrern Theilen: so werden die gleichnamigten zusammengeordnet, daß z. E.

$$\begin{array}{rl} & a+2b+d \text{ addiret} \\ & \text{zu } 2a+c+5d, \text{ die} \\ \hline \text{Summe giebt:} & 3a+2b+c+6d, \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \text{und } a-2b+c \text{ addiret} \\ & \text{zu } a-\ \ b+c \\ \hline \text{die Summe:} & 2a-3b+2c. \end{array}$$

Wenn aber die Zeichen vor demselben Buchstaben verschieden, Theils †, Theils — sind: so merke Dir zuerst, daß eines dieser beiden Zeichen gerade das Entgegengesetzte des andern bedeutet; und, wenn Ich bei † a Mir etwas gedenke das Ich habe, oder Vermögen: Ich bei — a Mir etwas gedenken muß, das ich nicht allein nicht habe, sondern auch schuldig bin. Wenn daher † a mit — a zusammenkömmt, um addirt zu werden: muß eins das andre tilgen; und wenn von der einen Gattung mehr ist, als von der andern: muß, wo die größre Anzahl ist, gerade so viel, als sie größer ist, überbleiben. $+a+(-2a)=-a$, und $4a+(-2a)=+2a$.

Die Größen, die † vor sich haben, heißen **Positivgroßen**, und die — vor sich haben **Negativgrößen.** Vor die Positivgrößen aber, die zu Anfange eines Ausdrucks stehen, wird das Zeichen † gar nicht gesetzet. Welche von Zweien einander entgegen gesetzten Größen Ich mir positiv, und welche negativ gedenken will, ist völlig gleichgültig.

Beim

Beim Subtrahiren einer Größe ordne Ich selbige durchaus unter das Zeichen —; welches überhaupt verlangt, daß Ich Mir das Entgegengesetzte dessen gedenken soll, was vorher da war. Folglich wird nun eine Positiv- zur Negativgröße und umgekehrt eine Negativgröße zur positiven. Wenn also von 3 a † 2 b — c soll abgezogen werden 2 a — b † c: so muß Ich diese ganze Größe als ein Einziges Mir gedenken, weswegen Ich sie in Häkchen einschließe und dann das Zeichen — davor setze. Der Ausdruck — (2 a — b † c) heißt nun: Bei dieser abzuziehenden Größe sollst Du Dir gedenken, daß das Zeichen — mit einem jeden Theil derselben die besagte Verwandlung mache. Alsdann hast Du das Subtrahiren gethan; wenn Du beide gegebnen Größen, die wovon abzuziehen war, und die die abgezogen werden sollte, nachdem diese besagtermaßen verwandelt worden, zusammen nimmst.

Stelle Dir die Sache auch so vor. Sollst Du von einer Größe, wie sie nun auch heißen mag, die folgende abziehen: a — b † c; und Du ziehest nun a † c ab: so hast Du zuviel abgezogen; weil an der abzuziehenden Größe ja b fehlte; und, weil nun gerade dessen Betrag zuviel abgezogen worden: muß b wieder hinzugesetzt werden. Heißt die abzuziehende Größe — a: so kann ja nicht einerlei herauskommen; wenn Ich † a und wenn Ich — a abziehe: da diese beiden Größen einander gerade entgegensetzt sind. Durch den Abzug von — a bleibt die gegebne Größe auch nicht so, wie sie ge-

geben

geben war. Denn — a ist nicht gleich Null. Es muß gerade dasselbe, was durch den Abzug von † a ward, nur mit dem entgegensetzten Zeichen, die Differenz sein. Da nun selbige bei † a war — a: so muß sie bei — a sein † a.

Das **Multipliziren** wird so verrichtet, daß Ich mehrentheils nur die Faktoren zusammensetze. a multiplizirt mit b giebt ab; 2 a ⋈ b = 2 ab. Sind aber die Faktoren einerlei, nämlich a, a: so wird das Faktum nicht aa ausgedrücket; sondern man schreibt den mehrmals vorhandnen Faktoren Einmal, und bezeichnet durch eine kleine über ihn, etwas zur rechten Seite, gesetzte Ziffer, wie vielmal er vorhanden. $aa = a^2$. $aaa = a^3$. 2 a,a $= 2\,a^2$. 2 a ist = 2,a.

Wird † a multiplizirt mit † b: so ist das Faktum † ab. Wird † a mit — b: so muß gerade das Entgegengesetzte von dem Fakto, da † b der Multiplikator war, herauskommen; folglich — ab.

Wird — a multiplizirt mit † b: so ist ja gleichviel, welchen von den beiden Faktoren Ich den Multiplikatoren sein lasse; folglich kann Ich nur umkehren: † b multiplizirt mit — a; welches — ab giebet. Ist aber — a, † b = — ab: so muß — a, — b gerade das entgegengesetzte Faktum, also † ab, geben.

Die Regel heißt demnach: **Wenn die Zeichen vor den Faktoren gleich sind: so bekömmt das Faktum †. Sind die Zeichen vor den Faktoren verschieden: bekömmt das Faktum —.**

Es

Es pflegt aber unbegreiflich zu fallen, wie aus $-a \times -a$ werden könne $+a^2$. Man denkt nämlich $-a$ als nichts; da denn ein mehrmal gedachtes Nichts gar nicht etwas Wirkliches ergeben kann. Allein, wenn $-a$ auch Nichts wäre: so würde dies mehrmals gedachte Nichts durch $-a \times +a$ ausgedrücket; welches auch $-a^2$ giebet. $-a \times -a$ aber heißt: Du sollst, wenn Du $-a$ genommen a mal $= -a^2$, bei diesem Fakto auch an alles das, was auf selbiges das Zeichen $-$ wirken müste, nicht weiter gedenken, vielmehr Dir völlig das Gegentheil davon vorstellen.

Zur weitern Aufklärung denke Dir auch so die Sache. Wenn $(a-b)$ multiplizirt werden soll durch $(a-b)$, und ich multiplizire nun erst $(a-b)$ durch a: so ist das Faktum $a^2 - ab$ offenbar zu groß: weil Ich das ganze a zum Multiplikator gebraucht habe; da doch nur ein Theil desselben, nämlich die Differenz, die nach abgezognem b bliebe, der Multiplikator sein sollen. Jenes Faktum ist also gerade um $(a-b)\,b = ab - b^2$, zu groß. Also muß von $a^2 - ab$ abgezogen werden $ab - b^2$, oder $a^2 - ab - (ab - b^2)$, welches, nach dem was beim Subtrahiren gesagt worden, giebet $a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Beim **Dividiren** brauchst Du nur zu gedenken, daß es ein umgekehrtes Multipliziren, oder dessen Auflösung, ist; woraus die Regel sich ergiebet, daß wenn der Divisor von den Zeichen $+$ und $-$ einerlei mit dem Dividendo hat, der Quozient $+$, und wenn bei beiden die

besagten

besagten Zeichen verschieden, der Quozient — bekommen muß. Diese Regel ist alsdann zu gebrauchen, wenn irgend ein Dividiren wirklich geschehen kann. Sonst aber wird der Quozient nur auf Art eines Bruchs hingeschrieben: $\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{2b}$, $\frac{c}{-m}$. Ein Exempel der ordentlichen Division wird alles erläutern. Es soll dividirt werden:

$$2a^3 - 4a^2b + 6a^2c - 2a^2d + ac - 2bc + 3c^2 - cd - ad + 2bd - 2cd + d^2$$

durch:

$$a - 2b + 3c - d$$

$$2a^3 - 4a^2b + 6a^2c - 2a^2d \quad (2a^2 + c - d$$

$$ac - 2bc + 3c^2 - cd$$
$$a - 2b + 3c - d$$
$$ac - 2bc + 3c^2 - cd$$

$$-ad + 2bd - 3cd + d^2$$
$$aa - 2b + 3c - d$$
$$-ad + 2bd - 3cd + d^2$$

$$00$$

Dieselbe Größe werde dividirt durch $2a^2 + c - d$. Alsdenn setze erst her vom Dividendo:

$$
\begin{array}{l}
\phantom{\text{Der Divisor: }} 2a^3 - 4a^2b + 6a^2c \quad (a - 2b + 3c \\
\text{Der Divisor: } 2a^2 + c - d \qquad\qquad - d \\
\phantom{\text{Der Divisor: }} 2a^3 + ac - ad \\
\hline
- 4a^2b + 6a^2c - ac + ad \\
2a^2 + c - d \\
- 4a^2b - 2bc + 2bd \\
\hline
6a^2c - ac + ad + 2bc - 2bd \\
2a^2 + c - d \\
6a^2c + 3c^2 - 3cd \\
\hline
- ac + ad + 2bc - 2bd \\
- 3c^2 + 3cd
\end{array}
$$

Diese Größen werden durch folgende in der Angabe befindliche gehoben: : : $ac - ad - 2bc + 2bd + 3c^2 - 3cd$

Dann ist noch übrig: $-2a^2d - cd + d^2$

$$
\begin{array}{l}
-2a^2d - cd + d^2 \\
2a^2 + c - d \\
-2a^2d - cd + d^2 \\
\hline
\infty
\end{array}
$$

Mehr brauchst Du, zu unsrer gegenwärtigen Absicht, noch nicht von der Buchstabenrechnung zu wissen. Dies aber hast Du bereits, nur daß die Fertigkeit Dir darin fehlt, gefasset. Daher erkennest Du schon daß alles sehr leicht, und, da das Einmaleins beinahe, die meiste Zeit, wegfällt, weit leichter, als beim Rechnen mit Ziffern, sei.

 Die

Die Deutlichkeit aber, die man dadurch sich beim Rechnen schaffen kann, soll Dir immer mehr in die Augen leuchten.

II. Von den Brüchen.

Wenn eine Zahl durch eine größere soll dividirt werden, entstehet ein Bruch. **Brüche** sind also Quozienten, die nicht anders können angegeben werden, als daß Ich die zu dividirende Zahl und den Divisoren durch das Zeichen der Division mit einander verbinde. Im Allgemeinen aber nennet man jeden auf diese Art angegebenen Quozienten einen **Bruch**; es mag nun der Divisor ein, oder mehrmal im Dividendo enthalten sein, welches einen **uneigentlichen** oder **unreinen Bruch** giebet, oder nicht.

Beim Dividiren kann Ich Mir gedenken, wie Wir oben längst gesehen haben, daß die zu dividirende Zahl in so viele Theile soll zerlegt werden, als der Divisor Einheiten enthält. Soll der Divisor nun Einmal im Dividendo stecken: so muß für jede Einheit desselben auch Eine im Dividendo enthalten sein. Also sind diejenigen Brüche Ein Ganzes, bei denen das Dividendum und der Divisor aus derselben Zahl bestehen. Eigentliche Brüche sind weniger als Ein Ganzes. Bei ihnen enthält nicht für jede Einheit des Divisors, sondern

nur

nur für eine oder einige Einheiten desselben, das Dividendum, beim Ausmessen, Eine Einheit.

Ich kann Mir die Sache auch so gedenken. Wenn das Maß, welches Ich gebraucht habe, eine Größe auszumessen, nicht mehr anzuwenden stehet, daß nämlich von der auszumessenden Größe noch etwas, aber nicht mehr so viel übrig ist, als Mein Maß anfüllet, oder demselben gleich kömmt; nehme Ich ein kleineres Maß, welches so beschaffen sein muß, daß es mehrmals wiederholet, jenes größere genau darstellet. Wenn auch dieses kleinere Maß nicht weiter anzuwenden stehet, und noch Etwas unausgemessen übrig ist; gehe Ich wieder zu einem kleinern Maß herunter; und so kann Ich oft sehr viele Unterordnungen in meinem Maß bekommen. Bei Theilung durch Zahlen nehme Ich gleich, nachdem der Divisor nicht mehr messen kann, eine Einheit desselben zum kleinern Maße an; da denn selbige den Ueberschuß beim Dividendo allemal rein messen muß: weil er doch auch aus einer oder mehrern Einheiten bestehet. Dabei muß Ich aber auch bemerken, wie sich dies kleinere Maß zu jenem größern, oder zum Divisor verhält, wie oft es wiederholt werden muß, das größere darzustellen. Siehest Du einen Bruch mit dieser Kenntniß an, z. E. $\frac{2}{3}$: so giebet die untre Zahl desselben, oder der Divisor selber (3) Mir an, wie oft die Einheit genommen werden muß, damit der Divisor, der nun ein Ganzes heißt, herauskomme. Die obre Zahl des Bruchs (2) zeiget Mir aber wieviel Mal die Einheit in dem Dividendo

dendo enthalten. Die untre Zahl des Bruchs benennet Mir die Anzahl der zu Einem Ganzen erforderlichen Theile, und heißt daher der **Nenner**: die obre Zahl zählt Mir zu, wieviel dergleichen Theile nur vorhanden, und heißt daher der **Zähler**.

Bei Brüchen kann Ich Mir vorstellen, es gehöre der Zähler unter die Art, die Mir der Nenner angiebet. Es gienge an, daß man $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ so schriebe: 1 Viertel, 2 Drittel. Daher sind nur diejenigen von Einer Art, die einerlei Nenner haben.

Wenn bei einem Bruch der Zähler, z. E. die Hälfte des Nenners ist; und Ich füge zu dem Zähler eine Zahl, deren Gedoppeltes Ich zu dem Nenner füge: so ist bei dem dadurch entstandenen neuen Bruch der Nenner wiederum das Doppelte von seinem Zähler. Z. E. $\frac{2}{4}$ und $\frac{5}{10}$; wo $\frac{2+5}{4+10} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$. Dasselbe ist nun bei jeder Multiplikazion des Zählers und des Nenners eines Bruchs, die mit einerlei Zahl geschiehet. Denn Ich kann so den durchs Multipliziren entstandnen Bruch in lauter solche zerlegen, die dem erst gegebnen völlig gleich sind, und bei denen also der Zähler dasselbe Verhältniß zu seinem Nenner hat. Also muß die Summe der Zähler auch zur Summe der Nenner eben das Verhältniß behalten, das beim erst gegebnen Bruch unter seinem Zähler und Nenner war. Ist dort der Zähler 2, 3 Mal, oder auf andre Weise, die sich durch eine ganze Zahl, oder

nur

nur durch einen Bruch, ausdrücken lässet, im Nenner enthalten; so muß das Faktum des Zählers auch eben so im Faktum des Nenners enthalten sein. Der Bruch bleibt also bei jeder Veränderung derselbe, die dadurch vorgehet, daß Ich seinen Zähler und seinen Nenner mit derselben Zahl multiplizire. Umgekehrt wird auch der Bruch im Wesentlichen, oder im Werth, gar nicht verändert; wenn Ich seinen Zähler und seinen Nenner durch dieselbe Zahl dividire. Denn, wäre das nicht: so müste ja auch jener Satz, daß die Multiplikazion des Zählers und des Nenners mit derselben Zahl keine Aenderung in dem Werth des Bruchs mache, falsch sein: da durch die Multiplikazion des Quozienten die dividirte Zahl wieder hergestellet wird. Ich kann also auf so mancherlei Art denselben Bruch ausdrücken, als sich sein Zähler und sein Nenner durch einerlei Zahl multipliziren und dividiren lassen. Will Ich ihn in kleinern Zahlen haben: muß eine Division des Zählers und des Nenners geschehen. Sofern aber dergleichen Division nicht geschehen kann; ist unmöglich den Bruch durch kleinere Zahlen auszudrücken. Daher ist der Bruch auf seinen kleinsten Ausdruck gebracht, dessen beide Zahlen Primzahlen sind.

Einen Bruch auf einen kleinern Ausdruck zu bringen; dazu sind die Regeln dienlich, die Ich Dir zur Erforschung, durch welche

Zahl sich eine gegebne heben lasse, gegeben habe. Willst Du aber gleich auf einmal den Bruch auf seinen kleinsten Ausdruck setzen: so untersuche durch Hülfe der Dir bekannten Tabellen, aus welchen Primzahlen jede Zahl desselben entstanden. Das Faktum aus denen Primzahlen, die bei beiden, dem Zähler und dem Nenner vorhanden sind, muß sowohl den einen als den andern heben; und keine größre Zahl kann beide heben, als das Faktum aus allen diesen Grundzahlen.

Auch diesen Weg kannst Du dabei gehen, daß Du die größre Zahl von beiden durch die kleinere dividirest, und, wenn Etwas dabei übrig bleibt, solches als den Divisor des vorigen Divisors gebrauchest, und so immer mit neuer Division fortfährest bis alles aufgehet. Ist dann der läzte Divisor Eins: so ist kein allgemeiner Theiler für Zähler und Nenner möglich. Sonst aber ist für selbige der besagte läzte Divisor der gröste gemeinschaftliche. Der Beweis davon ist dieser. Einen größern gemeinschaftlichen Theiler können zwei Zahlen nicht haben, als der der kleinsten von ihnen gleich ist. Theilt die kleinere Zahl nicht die größre: so muß der gemeinschaftliche Theiler auch nothwendig den Ueberschuß der größern Zahl über die kleinre oder deren Vielfaches theilen. Folglich ist nun der gemeinschaftliche Theiler für diesen Ueberschuß und jene kleinre Zahl zu suchen, der wieder nicht größer sein kann, als der Ueberschuß selbst. So geht nun der Schluß fort, bis endlich der Ueberschuß den nächstvorhergehenden zum Divisor gebrauchten Ueberschuß

berschuß theilet. Es verstehet sich nämlich von selbst, das zwo verschiedne Zahlen in so weit einerlei Theiler haben, als die eine ein Vielfaches der andern ist; daher nur immmer auf den Theil der größern Zahl zu achten ist, der nicht weiter durch die größre kann ausgemessen werden.

Können nur Zahlen von Einer Art zusammen addirt werden; und sind nur die Brüche von einer Art die gleiche Nenner haben: so **müssen die Brüche, die addirt werden sollen, von gleichen Nennern sein. Eben das gilt beim Subtrahiren.**

Mehrere **Brüche in Brüche von Einer Art zu verwandeln oder unter einerlei Benennung zu bringen,** geschiehet auf diese Art, daß Wir erst sehen, ob der gröste ihrer Nenner so beschaffen ist, daß er sich durch den oder die kleinern heben lässet. Alsdenn muß der Quozient durch die Multiplikazion jener kleineren Nenner ein Faktum geben, das dem besagten grösten Nenner gleich ist. Damit aber der Bruch, bei verändertem Nenner, derselbe bleibe; muß auch sein Zähler durch den besagten Quozienten multiplizirt werden. Läßt aber der gröste Nenner sich nicht durch den oder die andern heben: so multiplizire man alle Nenner in einander; alsdenn muß das Faktum sich durchaus durch jeden der Nenner heben, und folglich jeder Bruch sich mit einem Nenner, der dem Fakto gleich, herstellen lassen. Man kann aber dabei oft eine große Bequemlichkeit und

einen weit kleinern allgemeinen Nenner sich verschaffen: wenn man die gegebnen Nenner insgesammt in ihre Primzahlen auflöset, und von diesen Primzahlen diejenigen, die sich mehrmals bei verschiednen der Nenner finden, nur ein einzig Mal, doch mit der Behutsamkeit stehen lässet, daß, wenn dieselbe Primzahl mehrmals in Einem Nenner vorkömmt, sie in der grösten Anzahl, worin sie in Einem der Nenner vorhanden, bleiben muß. Z. E. 7, 8, 28, 30, 36 sein die fünf gegebnen Nenner. Selbige setze man so:

7	= 7		bleibt 7		
8	= 2,2,2	——	2,2,2	=	8
28	= 7,2,2	——	—		
30	= 2,3,5	——	3,5	=	15
36	= 3,3,2,2	——	3		

Die 7 ist hier in keinem der Nenner mehr als Einmal: also braucht sie nur ein einzig Mal zu bleiben. Die 2 aber ist in der 8 dreimal: also muß sie auch so oft da bleiben. Wo sie hingegen dreimal ist, da ist sie auch hinreichend für die Nenner, die sie nur 2 und 1 mal enthalten. Eben so muß 3 zweimal bleiben. Es ist demnach das Faktum 7,8,15,3 = 2520, welche Zahl durch jeden der gegebnen Nenner sich muß heben lassen: da in ihm für jeden der besagten Nenner die Primzahlen, woraus er bestehet, sich finden. Zugleich aber ist dieses Faktum der kleinste allgemeine Nenner: weil nicht mehrere, als die für alle die besondern Nennern durch-

aus

aus nothwendigen Primzahlen ihn zusammengesetzet.

Beim **Multipliziren eines Bruchs** gedenke wieder, das der Nenner nur die Art anzeiget von welcher die Einheiten des Zählers sind. Ist nun der Multiplikator eine ganze Zahl: so wird der Zähler damit multipliziret. Z. E. $\frac{2}{6}$, $2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Da aber der Quozient um soviel allemal vergrößert wird, als man den Divisor verkleinert: so kann man auch mit dem Multiplikator, wenn es angeht, den Nenner des Bruchs theilen. Ist der Multiplikator ein Bruch: so nimm erst an, daß der Zähler desselben die ganze Zahl sei, womit das Multipliziren geschehen müsse. Z. E. bei $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ ist $2 = \frac{6}{4}$. Dies Faktum ist aber zu groß: weil Ich nicht mit 2, sondern nur mit dem dritten Theil dieser Zahl multipliziren sollte. Das Faktum ist gerade 3 mal so groß, als es sein sollte. Ich muß also $\frac{6}{4}$ mit 3, oder, da schon eine Division dabei vorkömmt, mit einem Divisor dividiren, der 3 mal so groß ist, als der gebrauchte; folglich muß Ich den Nenner 4 bei $\frac{6}{4}$ mit 3 multipliziren, daß herauskomme $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Die Regel heißt also: **Sollen Brüche mit einander multiplizirt werden: so multiplizire die Zähler mit einander, welches den Zähler des Fakti ergiebet, und multiplizire auch die Nenner in einander, welches den Nenner des Fakti ergiebet.**

Das **Dividiren eines Bruchs** durch eine ganze Zahl geschiehet so, daß Ich mit dem

Divisor, wann es angeht, den Zähler dividire, sonst aber damit den Nenner multiplizire. Denn, wie in jenem Fall die Sache keine Schwierigkeit hat, so muß in diesem, da der Divisor, den schon der Nenner abgab, soviel größer geworden, der Quozient um eben soviel kleiner sein. $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$. Wo 8 Personen denselben Kuchen unter sich gleich austheilen sollen, der erst 4 Personen zum Theilen gegeben war, da muß nothwendig eines jeden Stück nur halb so groß sein, als was jeder der 4 bekommen konnte. Ist aber der Divisor auch ein Bruch: so dividire erst mit seinem Zähler, ohne auf seinen Nenner zu achten. Wie eben gesagt worden, muß mit dem Zähler also des zu dividirenden Bruchs Nenner multiplizirt werden. Z. E. $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$. Alsdenn ist $\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{15}$. Nunmehr ist aber mit einer viel zu großen Zahl dividiret: weil nicht mit 3, sondern mit deren Viertel dividirt werden sollte. Also ist der Quozient 4 mal so klein, als er sein müste, oder nur $\frac{1}{4}$ des verlangten. Folglich muß der gefundne mit 4 multiplizirt werden; welches geschiehet, indem Ich damit den Zähler unsers Bruchs $\frac{2}{15}$ multiplizire. Der wahre Quozient ist nun $\frac{8}{15}$. Siehe das ganze Verfahren wieder an: so wirst Du finden, daß **beim Dividiren eines Bruches durch einen andern der Divisor dergestalt umgekehrt wird, daß sein Nenner zum Zähler und sein Zähler zum Nenner wird, alsdenn aber unter beiden Brüchen ein ordentlich Multipliziren geschiehet.**

Man

Man pfleget die Richtigkeit dieser Regel auch so zu erweisen. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd}$. Gleichnamigte Brüche verhalten sich so zu einander, als ihre Zähler. Soll z. E. $\frac{1}{4}$ einer Zahl mit $\frac{1}{4}$ einer andern Zahl dividirt werden: so muß der Quozient derselbe sein, wenn Ich jene ganze Zahl mit dieser ganzen dividire. Ich lasse also bei jenen Brüchen die Nenner weg, denke Mir bloß derselben Zähler, und setze unter den des Dividendi den des Divisors $\frac{ad}{bc}$; welcher Bruch $= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

III. Vom Ausziehen der Wurzel.

Wenn eine Zahl mit sich selbst multipliziret wird: heißt das Faktum das Quadrat der angenommenen Zahl, welche man die Wurzel insofern nennet. Wird das Quadrat wieder mit der Wurzel multipliziret: so heißt das Faktum der Würfel (Cubus) Die Fakta, die entstehen, wenn der Würfel mit der Wurzel, und so fortan immer das herauskommende Faktum wieder mit der Wurzel multiplizirt wird, hatten ehemals auch ihre besondern schwerfälligen Namen, die nun gröstentheils in Vergessenheit gerathen sind, nachdem man eine bequemere Weise ausfündig gemachet, die besagten Fakta angeben zu können. Beim Quadrat wird eine Zahl mit sich selbst multipliziret: also bestehen beide Faktoren aus derselben Zahl, und diese Zahl muß

Ich Mir zweimal gedenken, so, daß das Quadrat von a zu schreiben ist a^2. Beim Würfel muß Ich gedenken, daß er aus a,a,a entstanden = a^3. Bei jeder neuen Multiplikazion kömmt noch Ein a hinzu; also wird die oben hingesetzte Zahl, welche man den **Exponenten** nennet, um Eins vermehret, oder a^{m+1}. Der Exponent kann Mir also zu einem sichern Unterscheidungszeichen für alle solche Fakta dienen. Diese aus lauter gleichen Faktoren entstandnen Fakta nennet man **Dignitäten, Potestäten, Potenzen** der **Wurzel**, von der man, je nachdem der Exponent angiebet, sagt, sie sei zu der 2ten, dritten u. s. f. Dignität erhaben, es sei derselben sovielte Dignität oder Potenz vorhanden. Die Wurzel bekömmt denn auch den Namen **Quadratwurzel, Kubikwurzel, Wurzel dieser oder jener Dignität**, in Absicht auf selbige. Man bedienet sich, sie anzugeben, des Zeichens $\sqrt{}$, so daß die in die Oeffnung gesetzte Ziffer $\sqrt[3]{}$ $\sqrt[10]{}$, die Dignität anzeiget, deren Wurzel man nennet. Setzt man das Zeichen $\sqrt{}$ bloß ohne Ziffer: so denkt man $\sqrt[2]{}$, die Wurzel der 2ten Dignität oder die Quadratwurzel.

Die verlangte Dignität einer Zahl ist leicht durchs Multipliziren gemacht. Aber aus einer gegebnen Dignität die Wurzel zu finden, oder, wie man redet, die **Wurzel ausziehen**, hat ziemliche Schwierigkeit; so, daß die Menschen

Menschen gewiß nicht sogleich darauf gekommen sind.

Wir wollen jetzt nur von Findung der Quadratwurzel handeln: weil Wir mit Wurzeln höherer Dignitäten Uns noch gar nicht beschäftiget haben.

Ich glaube, man hat lange sich nicht anders, die Wurzel eines Quadrats zu finden, zu helfen gewußt, als daß man vermuthet hat, sie möchte diese oder jene Zahl sein, deren Quadrat man verfertiget hat; woraus sich denn ergeben, ob man eine höhere oder eine geringere Zahl annehmen müssen. Durch mehreres Versuchen hat man denn endlich, oft mühsam genug, die rechte, oder zwo Zahlen gefunden, zwischen welchen die Wurzel nothwendig liegen muste. Der Bequemlichkeit halber hat man sich wohl, zu künftigem Gebrauch, was man einmal erfunden hatte, aufgeschrieben; woraus bei dem, der viel mit dergleichen Zahlen umzugehen nöthig gehabt, eine Sammlung von solchen Zahlen entstanden, die dadurch vollständig gemacht worden, daß man die zwischen durch fehlenden auch berechnet. So hat man auch jetzt Tabellen, welche die Quadrate aller einzelnen Zahlen, von der Einheit bis auf eine gewisse Höhe hinan, darstellen; davon du ein Exempel beim **Lambert** (*) an den Quadraten der ersten 1000 Zahlen finden kannst. Ein gewisser Jesuit, Paul **Guldin**, der zu Anfange des nächst vorigen Jahrhunderts gelebet, hat wie Ich vom **Tak**-

quet

(*) Zusätz. z. d. Logar. u. Trig. Tab. 184 bis 189. S.

quet (*) erfahren, die Quadrate und Würfel aller ganzen Zahlen bis auf 10,000 berechnet; und aus seinem Buche sind vermuthlich die Tafeln genommen, die sich, gerade nach dieser Beschreibung, im 2ten Theil des mathematischen Lexikons (**) finden. Diejenigen sind aber noch vollständiger, die in J. Hiob Ludolfs Tetragonometria Tabularia stehen; weil sie die Quadrate der Wurzeln, von 1 bis 100,000 enthalten. Dies Buch kann Ich Dir nicht vorweisen: weil Ich selbst es nur aus einer Anmerkung kenne, die Bernouilli der Französischen Uebersetzung von Eulers vollständiger Anleitung zur Algebra hinzugefüget; (***) imgleichen aus dem Heilbronner (****). Dergleichen Tafeln helfen überaus viel: aber damit allein war man noch nicht völlig gebässert; weil zwischen den wirklichen Quadratzahlen noch viele Zahlen liegen. Zwischen 1 und 4 z. E. ist keine Quadratzahl: aber die Wurzel von 2 und 3 zu wissen, kann mir doch gleichwohl nöthig sein, so, daß ich an der Bestimmung nicht genug habe, daß sie zwischen 1 und 2 lieget. Da versuche es nun Einer mal, und wenn er auch vollständige Kenntniß von zehntheiligen Brüchen hat, wie sauer es werden wird, durchs Probiren etwas herauszubringen.

Eine

(*) Arithmeticae Theoria et Praxi, Lib. 3. C. 8.

(**) Von der 1sten bis zur 84sten Seite.

(***) Elémens d'Algebre par Mr. Leon. *Euler*, Lyon 1774. in 8. T. I. Ch. XI. §. 116. (*)

(****) Hist. Mathes. Lib. IV. C. V. §. 200.

Eine genaue Betrachtung desjenigen, was beim Multipliziren, indem man das Quadrat einer Zahl von mehrern Gliedern verfertigt, vorgeht, konnte den Weg, wie dem **Theseus** der Faden der **Ariadne**, sicher zeigen, den man zurückzugehen hat, um von dem Quadrat auf die Wurzel zu kommeu. Jetzt scheint uns dieser Weg leicht zu finden; und man hätte denken sollen, daß, da **Euklid** schon wuste, daß, wenn eine Größe willkürlich in zwei Theile getheilt wird, das Quadrat der ganzen Größe aus den Quadraten der beiden Theile, mit dem gedoppelten Fakto beider Theile in einander zusammengenommen, bestehet, er diese Lehre, die er durch Linien (*) erweiset, auch auf Zahlen angewandt hätte. Ich finde indeß nichts davon in seinen Büchern über die Rechenkunst. Es kann sein, daß man auch in den ersten Jahrhunderten nach Christi Geburt noch nichts von kunstmäßiger Ausziehung der Quadratwurzel gewust habe. Denn **Diophant**, in dem Du Mich hast diese Tage blättern gesehen, schweigt auch davon: obgleich er sonst viel Künstliches von Quadraten und Würfeln enthält. Hier, in der Wüstenei für mathematische Kenntnisse, läßt sich so leicht nichts über die Erfindung einer mathematischen Auflösung ausmachen: doch muß ich noch sagen, damit du nebenher die Kenntniß von zweien nützlichen Büchern erhaltest, welche die Geschichte der Mathesis verhandeln, daß Ich beim **Heilbronner** (**) auch vergebens über diese

(*) In seinen Anfangsgründen, 2. B. 4. S.

(**) Historia Matheseos vniuersae.

diese Materie nachgesucht habe, und beim Montukla, (*) den ich, seit mehrern Jahren, mich vergebens bemühe zu sehen, eben so wenig etwas, nach dem Auszuge vermuthen kann, der von ihm in der Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniß enthalten. (**)

Die Quadrate der Neun ersten Zahlen stehen im Einmaleins; also sind deren Wurzeln bekannt, und Wir dürfen nicht auf eine andre Art sinnen, sie aufzufinden. Keins dieser Quadrate bestehet aus mehr, als zweien Ziffern. Das erste was eine Ziffer der dritten Ordnung hat, nämlich 100, hat zur Wurzel 10.

Besteht die Wurzel aus zweien Ziffern, daß sie z. E. 24 ist: so wird das Quadrat solchergestalt gemachet, $\left(\frac{24}{24}\right)$ das Ich erst mit der Einen Zahl die ganze Wurzel multipliplizire, dadurch ein Multiplizien dieser Zahl mit sich selber und mit der andern Zahl geschiehet. Drauf multiplizire Ich mit der andern Zahl, wodurch wieder diese Zahl mit sich selber und mit der andern, nur in verkehrter Ordnung, als bei jener ersten Zahl, multipliziret wird. Du weist, daß Ich Dir das das deutlicher gemachet, indem Wir, statt der beiden Ziffern, a † b gesetzet; weil 24 z. E. sich doch in 20 † 4 auflösen lässet. Das Quadrat entstehet nun so:

a † b

(*) Histoire des Mathematiques,

(**) Im 1, 3 und 4ten Stück.

$$
\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \\
\hline
ab + b^2 \\
a^2 + ab \quad\quad \\
\hline
a^2 + 2\,ab + b^2
\end{array}
$$

Bestehet die Wurzel aus noch so vielen Ziffern: so wird immer, bei Verfertigung des Quadrats, jeder Theil der Wurzel, den Eine Ziffer anzeiget, mit sich selber und mit jedem der andern Theile multipliziret. Folglich muß immer eines jeden Theiles Quadrat und das Faktum aus diesem Theile durch die Summe der übrigen da sein.

$(a+b+c+d)^2$ ist also =

$$a^2 + (a(b+c+d) = ab+ac+ad)$$
$$+ b^2 + (b(a+c+d) = ab+bc+bd)$$
$$+ c^2 + (c(a+b+d) = ac+bc+cd)$$
$$+ d^2 + (d(a+b+c) = ad+bd+cd)$$

Weil alle Theile, die bei dem Einem Faktor des Quadrats vorhanden, auch bei dem andern vorhanden sind: so entstehet zwar nur das Quadrat eines jeden Theils alsdenn, wenn dieser Theil eben der Multiplikator ist; aber die übrige Verbindung zweier ungleicher Theile entstehet sowohl wenn der Eine, als auch wenn der andre Theil der Multiplikator ist, und folglich befindet sich in dem Hauptfakto jedes andre Glied, das kein Quadrat ist, gedoppelt.

Gieb genau auf alles Acht, was beim Multiplizieren folgender Zahl 425 mit sich selber vorgeht, wobei 400 = a, 20 = b und 5 = c ist.

$$
\begin{array}{r}
425 \\
\underline{425} \\
25 = c^2 \\
10\,. = bc \\
20\,.\,. = ac \\
10\,. = bc \\
4\,.\,. = b^2 \\
8\,.\,.\,. = ab \\
20\,.\,. = ac \\
8\,.\,.\,. = ab \\
16\,.\,.\,.\,. = a^2 \\
\hline
180625 = a^2 + 2ab + b^2 + (2ac \\
+ 2bc = 2(a+b)c) + c^2.
\end{array}
$$

Das Quadrat von c stehet mit seiner Endziffer ganz im läztten Gliede. Zwei Glieder höher, oder im Fach der Hunderte, stehet die Endziffer des Quadrats von b. Noch zwei Glieder höher, oder im Fach der Zehntausende, stehet die Endziffer des Quadrats von a. Das muß beständig so kommen, daß, wenn die Zahl, deren Quadrat man verfertigt, auch aus noch so vielen Gliedern bestehet, immer das Quadrat des nächst höhern Gliedes um 2 Fächer höher mit seiner Endziffer zu stehen kömmt, als das Quadrat des zu nächst niedrigern Gliedes. Wenn Wir also eine Quadratzahl mit Fächern, von

von der Rechten gegen die Linke zu, abtheilen, so, daß Wir jedem Fach zwo Fächer oder Ordnungen Unsrer Zifferart geben: so sind die Plätze, wo die Quadrate der einzelnen Theile mit ihrer Endziffer anfangen, abgesondert, und die Wurzel muß aus so vielen Ordnungen, als Fächer gemacht worden, bestehen.

Bei dem 2ten Fach der Zifferart, oder beim Fach der Zehner steht die Endziffer von bc, oder des Fakti, welches das 2te und dritte Glied der Wurzel mit einander verbindet. Beim 4ten Fach, oder beim Fach der Tausende, steht die Endziffer von ab, oder des Fakti, welches das 1ste und 2te Glied der Wurzel mit einander verbindet. Das muß nothwendig so fort gehen, daß immer um 2 Fächer höher das von dem Theil der Wurzel, dessen Quadrat eben da gewesen, durch den nächst höhern Theil der Wurzel gemachte Faktum mit seiner Endziffer steht. Das Faktum aus dem höchsten Gliede der Wurzel durch das nächst niedrigere Glied (ab) steht mit seiner Endziffer um Ein Fach der Zifferart niedriger, als die Endziffer des Quadrats vom höchsten Gliede. Es stehet dieses Faktum auch ganz allein da mit seiner Endziffer.

Nun lasse Uns mal ein Quadrat aus einer Wurzel mit den höchsten Ziffern für jede Ordnung, nämlich aus 999, machen; damit Wir sehen, wie hoch, oder bis zu welcher Ordnung oder Fach jedes der obgedachten Theile des Quadrats hinaufgehen könne.

$$
\begin{array}{r}
999 \\
999 \\
\hline
81 = c^2 \\
81. = bc \\
81.. = ac \\
81. = bc \\
81.. = b^2 \\
81... = ab \\
81.. = ac \\
81... = ab \\
81.... = a^2 \\
\hline
998001 = (a+b+c)^2
\end{array}
$$

Wir wollen jede gedoppelten Fakta in Einen Ausdruck bringen. Dann ist:

$$
\begin{array}{r}
81 = c^2 \\
162. = 2bc \\
162.. = 2ac \\
81.. = b^2 \\
162... = 2ab \\
81.... = a^2 \\
\hline
998001 = (a+b+c)^2
\end{array}
$$

Zu dem Quadrat von a, das in den beiden höchsten Ordnungen enthalten, kommen hier 18; welches nicht so viel ist, daß es mit a^2 ausmachte $(a + 100)^2$, sondern die Summe beträgt nur $(a + 100)^2 - 10{,}000$. Setze Ich an die Stelle der Hunderte in obiger Wurzelzahl nach einander 8,7 und alle folgende Zahlen bis 1 hinunter: so wirst

wirst Du finden, das dasjenige, was hinüberkömmt zu dem Platz, wo a^2 stehet, nie mehr, und gerade so viel durchgängig ausmachet, daß es mit a^2 zusammen beträgt $(a + 100)^2 - 10000$. Kann nun bei einer solchen Zahl, wo in den niedrigern Fächern sich lauter 9 befinden, auf den Platz von a^2 nicht $(a + 1)^2$ kommen: so muß das um so viel weniger möglich sein, wenn sich in den niedrigern Fächern eine geringre Ziffer befindet.

Damit Du aber nicht meinest, daß vielleicht bei einer Zahl, die aus mehr als dreien Ordnungen in ihrer Wurzel bestehet, die Sache anders sein könne: wollen Wir den Beweis noch allgemeiner fassen. Nimm an, es stecke in dem höchsten Fach des Quadrats, oder in a^2, eine höhere Wurzel, als der wahre höchste Theil der zu suchenden Wurzel: so kann Ich ja nur gedenken, daß alle nachfolgende Ordnungen der gegebnen Quadratzahl mit lauter Nullen angefüllet sind; und alsdenn wird für jedes der Fächer, worin die Quadratzahl getheilt worden, dem gefundnen Theil der Wurzel eine Null nachgesetzt werden müssen, und dadurch die wahre Wurzel der gedachtermaßen durch die Nullen veränderten Quadratzahl gefunden sein. Die solchergestalt veränderte Quadratzahl ist aber kleiner, als diejenige, die an dem Platz, wo nun Nullen stehen, bedeutende Ziffern hatte. Hingegen ist die Wurzel, die die höhere Ziffer in ihrer höchsten Ordnung hat, unter beiden Wurzeln unstreitig die gröste. Siehst Du nun wohl das Ungereimte, daß also die kleinere Wurzel, das größre Quadrat, und die größre Wur-

zel das kleinre Quadrat haben müsse? Dies Ungereimte folgt aber aus dem Satze richtig, daß das höchste Fach des Quadrats so sehr durch dasjenige, was durchs Addiren hinübergekommen, vergrößert werden können, daß dadurch eine höhere Quadratzahl entstehe, als die dort von dem höchsten Theil der Wurzel befindlich sein muß. Also ist dieser Satz falsch.

Bei den übrigen Theilen der, z. E. aus einer Wurzel von 3 Ordnungen, bestehenden Quadratzahl kann sichs zutragen, daß sie alle, außer c^2, bis zu dem Fach, und zu der Ordnung, alwo die Endziffer von $2ab$ befindlich, hinaufkommen; woraus entstehen kann, daß Ich b Mir Anfangs größer gedenke, als es wirklich ist. Aber, sobald Ich nun eine solche Zahl für b gefunden, daß Ich $2ab + b^2$ abziehen können; also nun von dem ganzen Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ die richtige Wurzel $a + b$ da ist: so ist der nunmehr berichtigte Theil des Quadrats für a^2 anzusehen; und es gilt hier wieder der eben gegebne Beweis dahin, daß keine in irgend ihrem höhern Theile, also auch nicht in $a + b$, größere Wurzel, als die wahre, gefunden werden könne.

Werden die Glieder des von Uns angenommenen Quadrats $(a + b + c)^2$ nach den Ordnungen ihrer Endziffern geordnet: so kommen sie folgendermaßen zu stehen: $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$. Die beiden Glieder $2ac + 2bc$ aber kann Ich in Eins ziehen $2(a + b)c$; welches ergiebet, daß Ich, um c zu finden, $a + b$ jetzt eben so ansehen muß,

muß, als Ich vorhin a, zur Auffindung von b anzusehen hatte, folglich den gesammten gefundnen Theil der Wurzel, in Absicht auf den noch zu findenden, für a, und den bereits berichtigten Theil des Quadrats für a^2 anzusehen habe. Besteht die Wurzel auch noch aus einem Theil d: so muß in dem Quadrat auch das gedoppelte Faktum dieses Theils mit allen vorhergehenden Theilen enthalten sein. $2(a + b + c)d$. Folglich dient die Formel $a^2 + 2ab + b^2$ Mir überhaupt zur Regel bei allen möglichen Quadraten; aus wie vielen Gliedern sie auch immer bestehen; daß Ich im Fortschreiten immer den gefundnen Theil der Wurzel, also auch $a + b$, $a + b + c$, u. s. f. für a halten kann.

Damit Wir nun Alles im obigen Gesagte zu Erfindung der Wurzel aus einem gegebnen Quadrat anwenden; so wollen Wir folgende Zahl hersetzen:

				Wurzel
	54	61	21	(739
$a^2 =$	49			
	5	61		
$2a =$	1	4		
$2ab =$	42			
		141		
$b^2 =$		9		
		132	21	
$2a + b =$		14	69	
$2ab + b^2 =$		132	21	
			00	

Man theile die gegebne Zahl in Fächer, jedes von 2 Ordnungen der Ziffern, von der Rechten nach der Linken ab. In dem läzten Fach zur Linken, welches auch nur aus Einer Ziffer bestehen kann, muß a^2 enthalten sein; welches hier 49: da die nächst höhere 64 schon zu hoch ist. Die 49 ziehe Ich ab von 94: so zeigt Mir die Differenz 5 was durchs Addiren zu a^2 herübergekommen, und zu dem, was der niedrigre Theil der Wurzel ergeben, gehören muß. Von 49 ist die Wurzel 7; welche Zahl Ich hinsetzen kann, ohne Mich jezt darum zu bekümmern, von welcher Ordnung sie ist: weil sich die Ordnung schon von selbst dadurch ergiebet, daß noch 2 Glieder der Wurzel, wie die Abtheilung der Quadratzahl zeiget, nachfolgen müssen. Nachdem Ich zu dem gedachten Rest 5 die beiden Zahlen 61 des folgenden Fachs heruntergesezet, betrachte Ich daß in 56 nothwendig 2 ab stecken muß: obgleich dazu von den übrigen Theilen des Quadrats noch etwas addirt sein kann. Weil Ich $a = 7$ habe; kann Ich daraus gleich $2a = 14$ machen. 56 also, oder ein Theil dieser Zahl, muß ein Faktum sein aus der Multiplikazion von 14 mit b. Dividire Ich nun das Faktum 56 mit dem Einen Faktoren 14: so muß der Quozient b der andre Faktor sein. Weil aber in 56 noch mehr, als 2 ab; sein kann: wird oftmals auf die angewiesene Art b zu groß gefunden; so wie hier auch 14 in 56 den Quozienten 4 ergeben hätte; da 4, $14 = 56$. Aber, da in demjenigen, was von 56 übrig bleibt, und in der 1 von 561 noch b^2 stecken muß: so ergiebt sich gleich aus b^2 ob auch b zu hoch

ange-

angenommen worden. Ich kann Mir dabei die Arbeit etwas erleichtern: wenn Ich $2ab + b^2$ auflöse in $(2a + b)b$, und darnach gleich neben $2a$ den neuen Theil der Wurzel $= b$ setze, und denn auf Einmal mit b multiplizire und das Faktum $2ab + b^2$ auf Einmal abziehe. Zu dem Rest, der hier 132 ist, setze Ich das lätzte Fach 21 herunter. Nun muß in 1322 stecken 2 ab. Es ist aber jetzt $a = a + b$: folglich muß die Zahl 73 multiplizirt werden mit 2; wovon das Faktum zum Divisor von 1322 gebraucht wird. Der Quozient ergiebt Mir denn den lätzten Theil der Wurzel $= 9$ auf eben solche Weise, als eben der zweite Theil gefunden worden. Beim Dividiren der Zahl, worin das Faktum von 2 ab stecken muß, ist durchgängig zu bemerken, daß b nie mehr, als eine einzelne Ziffer sein kann, folglich das Dividiren so geschehen muß, das des Divisors Endziffer allemal gleich unter die Endziffer der zu dividirenden Größe gesetzt werde.

Brüche werden mit einander durchs Multipliziren ihrer Zähler und ihrer Nenner in einander multipliziret. Also weist Du wie ihr Quadrat entsteht, imgleichen daß, die Wurzel eines Bruchs zu finden, aus dem Zähler und aus dem Nenner desselben die Wurzel gezogen werden muß. Bei eigentlichen Brüchen ist der Nenner größer als der Zähler; daher muß durchs Multipliziren der beiden gleichen Nenner eine größre Zahl, als durchs Multipliziren der beiden gleichen Zähler, entstehen: folglich kann das Quadrat eines eigentlichen Bruchs keine ganze Zahl sein.

Bei einem uneigentlichen Bruch möchte, wenn derselbe Ein oder mehr Ganze nebst einem Bruch enthält, Zweifel entstehen, ob dessen Quadrat nicht etwa eine ganze Zahl sein könne. Bedenke aber mal die Ursache warum bei einem solchen Bruch der Nenner den Zähler nicht hebt. Ist es nicht diese, daß in dem Nenner Primzahlen enthalten sind, die entweder gar nicht, oder nicht in so großer Zahl in dem Zähler vorkommen? Durchs Multiplizireu zum Quadrat werden die Primzahlen, beim Zähler sowohl als beim Nenner verdoppelt. Folglich bleiben sie auch im neuen Nenner von denen im neuen Zähler, es sei nun ihrem Wesen oder ihrer Anzahl nach, verschieden. Also kann auch hier der Nenner nie den Zähler ohne Rest theilen. Also muß durchaus auch hier bei den uneigentlichen Brüchen das Quadrat ein Bruch sein.

Daher kann man nun schließen, daß, wenn eine ganze Zahl keine Wurzel unter den ganzen Zahlen hat, diese Wurzel weder ein eigentlicher noch ein uneigentlicher Bruch sein könne.

Indeß kann man doch der Brüche sich zur Angabe der Wurzel einer nicht vollständigen Quadratzahl bedienen, so daß man immer näher der Wahrheit kömmt, und den Irrthum ins Unendliche fort immer kleiner machet. Nie kann hier die Rechnung auf einen Bruch kommen, da sie aufhören müste. Vollständig läßt sich die Wurzel durch keine mögliche Zahl angeben; daher sie eine **Irrazionalzahl**, eine **Surdische**, eine **Unermäßliche Zahl** heißt.

Man

Man bedient sich, wie Du weißt, bey Ausziehung solcher Wurzeln dieser Art, daß man der gegebnen Zahl, die das Quadrat ausdrücket, an der Rechten ein neues Fach mit zweien Nullen anhänget, alsdenn auf eben diese Weise, wie oben angegeben worden, mit Ausziehung der Wurzel fortfahret, und dieses Anhängen und Ausziehen fortsetzet so lange man will. Was man hiedurch aber für die Wurzel findet, ist ein zehntheiliger Bruch.

Der vortrefliche Mathematikus Christoph Klau, dessen Erklärung des Euklids Du demnächst stark studiren must, giebt noch eine andre Art an, eine Surdische Quadratwurzel zu finden, die man aber alsdenn größer, als die wahre Wurzel erhält. Wie man dabei verfahren müsse, stehet in seinem kurzen Begriff der ausübenden Rechenkunst; (*) woraus Ich Dich mit der Hauptsache etwas bekannt gemacht habe.

Ueberaus nützlich und bequem wäre es; wenn Wir die Wurzeln aller unvollständigen Quadratzahlen auch in solchen Tafeln, wie der vollständigen Quadratzahlen, berechnet hätten; welche Rechnung denn

(*) Chr. CLAVII Epitome Arithmeticae Practicae Rom. 1585 in 8. Pag. 321 seqq. Er hat noch größer Werk von der Rechenkunst, wie er dort, zu Ende des Werkchens sagt, herausgeben wollen; muß aber damit zurückgeblieben sein: weil es auch nicht in der Sammlung seiner gesammten Werke steht, die 1612 zu Mainz in 5 Foliobänden herausgekommen.

denn nur bis auf eine gewisse Anzahl von Ziffern gehen dürfte. Etwas davon findet sich in Lamberts mehrgedachtem Buche, (*) alwo die Wurzeln der Zahlen von 1 bis 100 durchgängig mit 8 Ziffern angegeben sind. Der Einfall, den ich bei dieser Materie hatte, hat Dich vergnüget, daß Du ein frühzeitiger und sehr nützlicher Schriftsteller werden könntest; wenn Du bis auf die Wurzel von 1000 z. E. solche Rechnung fortzusetzen unternähmest. Eine einzige Schwierigkeit aber wäre nur für Dich bei der Arbeit, die Wir daher wohl bis dahin müsten anstehen lassen, daß die künstliche Maschine, die Schach spielen kann, hieher kömmt. Denn da selbige, so oft ein unrechter Zug von dem Mitspielenden gemacht wird, mit dem Kopfe schütteln soll; und vermuthlich auch das Rechnen verstehen wird; wenn sie denn nur, so oft Deine Flüchtigkeit Dich in Fehler bringt, schüttelt: so weist Du hernach schon von selbst wie gerechnet werden muß. Eine Erleichterung bei dieser Arbeit schaffte die Betrachtung, daß von dem Fakto zweier oder mehr Quadrate die Wurzel das Faktum ist, welches aus den Wurzeln jener Quadrate entstehet. Jene andern Tafeln für die vollständigen Quadrate sind indeß weit leichter zu verfertigen: weil dazu nicht nur das Muptipliziren der Wurzeln nach der Reihe allein zureicht, sondern, nachdem das Eine Quadrat gefunden worden, oder a^2, das nächst höhere, oder $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$ ist; folglich zu dem gefundnen Quadrat nur allemal das Gedoppelte der Wurzel dieses Quadrats nebst einer Einheit zugethan wer-

(*) Zus. z. d. Logar. u. Tr. Tab. a. d. 208. S.

werden darf, um das Quadrat der nächst höhern Zahl zu finden.

Nunmehr wollen Wir unsre **hölzerne Rechentafel** mal wieder vornehmen; davon Ich lange nichts hier gedacht habe: obgleich Wir Uns noch fast täglich mit ihr beschäftigen. **Wie wird auf selbiger die Quadratwurzel ausgezogen?** Die Frage lege mal einem geschickten Rechenmeister vor: sie möchte ganz gewiß manchen in Verlegenheit setzen, und wohl gar nöthigen Dein Schüler zu werden. Ein Par Tage Nachdenken hat Mir die Erfindung gekostet, die Wir nun leicht beschreiben können. Nachdem die gegebne Quadratzahl auf die Tafel gelegt worden, muß ihre Abtheilung in Fächer so geschehen, daß jedes Fach Vier Fächer der Tafel bekömmt. Denn jedes Fach Unserer Dekadik wird durch 2 Fächer der Tafel vorgestellet. Damit Wir die Fächer der Quadratzahl unterscheiden; haben Wir die Zeichen I,V,X,L auf anders gezeichnete Karten, die z. E. einen rothgesprenkelten Grund, und die Zeichen C,D,M,VM auf solche Karten, die einen blaugesprenkelten Grund haben, geschrieben, und so immer mit den Karten von beiderlei Art Grunde unter den Zeichen der verschiednen Quadratfächer abgewechselt. Ueber ein jedes jener 4 ersten Zeichen haben Wir eine I geschrieben: weil die Wurzel aus jenen Fächern in die Klasse der Einheiten, wozu nun aber auch die Klasse von V gehöret, kommen muß. Aus gleichem Grunde haben die Täfelchen für das zweite Fach ein X, die fürs dritte ein C, die fürs vierte ein M, u. s. w.

Auf der so eingerichteten Rechentafel verfahren Wir nun folgendermaßen. Es sei die Quadratzahl: 710649.

	C DM	C CM	C LM	C XM	X VM	X M	X D	X C	I L	I X	I V	I I
Wurzel DCCCXXXXIII	I	2		I			I	I		4	I	4
a^2 =	I	I		4		I	I	I		4		
							2a			b		
			I	2			I	I				
				I	I	I		4				
					10(2	a	†	b)				
			I	I	I		I	I				
					I					4	I	4
						I	I	I	I	3		3
								2a				b
					I					4	I	4
					o					o	o	o

Wann Ich dasjenige, was in dem mit C bezeichneten Fach liegt, zusammen nehme: so enthält es LXXI von der Ordnung XM. Die nächste Wurzel ist LXIIII, welche, abgezogen VII (XM) übrig lässet. Der gefundne Theil der Wurzel ist von der Ordnung C, also DCCC. Davon ist das Gedoppelte MDC. Weil Mir aber von b schon so viel bekannt ist, daß es von der Ordnung x sein muß: multiplizire Ich jetzt gleich mit x; damit Ich, wenn Ich hernach b gefunden, zur Auffindung von 2 ab, nur bloß mit $\frac{b}{x}$, oder mit einem solchen b multipliziren darf, das Ich Mir vom Fach der Einheiten

heiten gedenke. Ich rücke also jedes Glied von 2 a um 2 Fach der Tafel höher. I von der Ordnung XM in VII (XM) kann Ich nicht mehr, wie das Probiren ergiebet, nehmen, als IIII mal; weswegen Ich in den Quozienten für b setze XXXX. Von XXXX das Quadrat zu machen, kann Ich auch mit IIII,X multipliziren. Also multiplizire Ich erst mit X, das ist Ich lege XXXX um 2 Fach höher. Dann multiplizire, Ich (2 a † b)X mit dem übrigen Theil von b oder mit IIII, und ziehe das Faktum ab. Nunmehr ist a = DCCCXXXX. Ich lege 2 a in die gehörigen Fächer mit MDCLXXX, und dividire, um b zu finden, mit I (M) die Zahl VM. Der Quozient darf nur III angenommen werden. Derselbe wird von der Ordnung der Einheiten. Ich füge ihn zu den andern gefundnen Theilen der Wurzel, und lege ihn auch in das gehörige Fach. Das Faktum von 2 a † b durch b ergiebt gerade soviel, als noch auf der Tafel liegt.

Zur Deutlichkeit dient hier daß man allemal 2 a † b mit Marken, die ein Abzeichen haben, etwa von einer andern Farbe sind, einlege. Ferner muß hier, wenn man nicht etwa zum Multipliziren und Dividiren eine besondre Tafel nehmen will, beides so beschafft werden, daß man nicht Faktoren und Quozienten bei V abbricht, sondern gleich auf Einmal die ganzen Zahlen VI, VII, VIII und VIIII nimmt.

Eins, dünkt Mich, hast du hier auf der Tafel nun deutlicher, als bei dem gewöhnlichen Verfahren des Ausziehens auf der Feder, einsehen gelernt, nämlich warum man, bei vorigem Exempel, 2 a = 1600, um

um b zu finden, so unterschreibet, daß es in den Platz von 16000 zu stehen kömmt.

Regeln, wie man einer Zahl gleich ansehen könne, ob sie eine Quadratzahl, und was ihre Wurzel sei, kann Ich Dir zwar nicht geben: doch läßt sich dabei noch Manches bemerken. Die Quadrate der 9 ersten Zahlen sind diese:

I.	II.	III.	IIII.	V.	IIII.	III.	II.	I.
1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

Die erste davon an jedem Ende hat zur Endziffer eine 1.; und so haben immer zwei, die gleich weit von jedem Ende abstehen, einerlei Endziffer. Die 5te Zahl aber, die in der Mitte steht, ist mit ihrer Endziffer nur einfach da. Diese Endziffern sind: 1, 4, 9, 6, 5. Hat die Wurzel eine 0 am Ende: so bekömmt das Quadrat am Ende zwei Nullen. Also muß, weil jede Wurzel am Ende eine der Ziffern der 9 ersten Zahlen, oder eine 0 hat, jedes wahre Quadrat sich auf 00 oder eine der besagten Ziffern endigen; und wo eine Zahl sich auf Eine 0, oder auf 2, 3, 7, 8 endigt, kann selbige keine Quadratzahl sein. Weiter kann ich nichts mit Gewißheit, wenn die Endziffer 1, 4, 9, 6, 5 oder 00 ist, sagen, als daß die Zahl vielleicht eine Quadratzahl sein möge, und alsdenn ihre Wurzel zur Endziffer z. E. 3 oder 7, 1 oder 9, u. s. w. haben müsse.

Die **Quadratwurzeln bei andern Rechnungsarten auszuziehen**, hat Uns auch in etwas beschäftigt. Es dient dabei die Regel $a^2 + 2ab + b$. In **Leibnitzens Dyadik** ist die

Arbeit

Arbeit so leicht: weil alles Multipliziren und Dividiren dort eigentlich wegfällt, und jeder Theil der Wurzel nur eine Ein oder ein Null werden muß; daß man gereizt werden könnte, jede Zahl, woraus eine Wurzel zu ziehen ist, deswegen in die Dyadik zu übersetzen. Ich will kein Exempel darüber geben: da Du keines bedarfst. Allenfalls kann man welche beim **Brander** (*) finden. Von der **Tetradik** mag folgendes Exempel dienen.

Dekadik	Tetradik	Wurzel
50,625 ═══	30 | 11 | 30 | 01	(3201
a^2 =	21	= 225 der Dekadik
	3 | 11	
2 a † b =	1 | 22	
2 ab † b^2 =	3 | 10	
	1 | 30	
2 a =	13 | 0	
	1 | 30 | 01	
2 ab † b^2 =	1 | 30 | 01	
	0	

Hier bestehet das Quadrattäfelchen nur aus diesen Gliedern:

Wurzeln		Quadrate
1	, , ,	1
2	, , ,	10
3	, , ,	21

(*) Arithm. Binaria a. d. 30. u. ff. SS.

Jedes wahre Quadrat muß sich auf 1 oder auf 0 endigen; keines aber kann sich auf 2 oder auf 3 endigen. Hat die Wurzel am Ende 0: so muß das Quadrat am Ende 00 haben.

* * * *

Mein Versprechen habe Ich nunmehro wohl reichlich erfüllet? Fast sollte Ich denken, es könnte Dich, und wenn Du auch bis zur Akademie nichts weiter von der in meinem dreien Kapiteln enthaltnen Materie lerntest, nichts dabei irgend in Verlegenheit setzen. Aber Du must über meine Worte nachdenken, die Begriffe, die Dir noch dunkel sind, zur Klarheit und Deutlichkeit bringen, und vor allen Dingen alles im Gedächtniß behalten. Dabei kann nichts herauskommen; wenn man immer von forn wieder anfangen muß. Laß Dich ja nicht durch ein solch Geschwätz verführen, daß die Jugend alles im Spielen lernen, und das Gedächtniß bei leibe nicht angesträngt werden müsse. Mehrentheils ist dasjenige, was man so ganz im Spielen lernt, nicht viel werth. Denn, wie ein berühmter Mann, Klerikus, zu seinem Wahlspruch genommen hatte, es ist nun einmahl das Loß der

Sterblichen, daß sie nichts ohne große Arbeit in dieser Welt haben sollen. (*) In deinen Jahren muß das Gedächtniß geübt werden: denn ohne Uebung wird es nicht stark und erlangt keine Fertigkeit. Du weist daß Ich noch beinahe die gesammten Hallerschen Gedichte und verschiednes aus dem Horaz und Andern, zu meinem großen Vergnügen, auswendig kann, und Wir allenfalls noch wohl mit einander ansetzen können, wer zuerst eine gewisse Fabel aus dem Gellert lernet. Ich bin aber lange nicht so, wie Du, zu den Wissenschaften angeführt worden. Große Männer haben sichs oft zum Ruhm angerechnet, daß ihr Gedächtniß viel vermöchte; und die Gedächtnißverächter sind nicht darum auch diejenigen, die am schärfsten und richtigsten urtheilen können. Daß Gedächtniß, sagt der Aeltre Plinius, (**) gehört zum allernothwendigsten] Gut im menschlichen Leben. Er führt dabei verschiedne Exempel von Leuten an, deren Gedächtniß stark gewesen, und gedenket einer eignen Gedächtnißkunst, die Simonides, bei einer

(*) — — — Nil sine magno
Vita labore dedit mortalibus,
stehet unter seinem Bilde vor seiner Arte Critica imgleichen vor seinen Operibus Philosophicis.

(**) Histor. Natur. Lib. VII, Cap. 24 Sect. 24.

Gelegenheit, die Ich Dir auch aus dem **Phäder** (*) gesagt habe, erfunden, als nämlich **Kastor** und **Pollux** ihm die Belohnung zu ihrem Theil vergüteten, die ein elender Klopffechter ihm entzogen hatte. Mit der ganzen Kunst aber, die **Quintilian** (**) ziemlich umständlich beschreibet, will es, gleich wie mit andern ähnlichen, die Ich Dir sonst angeben könnte, auch beiläufig bekannt machen werde, (***) so viel eigentlich nicht sagen; daher auch **Quintilian** sich mit ihr nicht befassen will, sondern sehr weislich behauptet, die einzige und wirklich große Gedächtnißkunst sei diese, daß man sich übe und anstränge. Darin bestehe die Hauptsache daß man viel auswendig lerne, viel nachdenke, und diese Uebung, wenn es angehe, tagtäglich treibe. Nichts werde so leicht, als das Gedächtniß, durch Sorgfalt zum Wachsthum gebracht und durch Nachläßigkeit vernichtet. Junge Knaben müsten also gleich angehalten werden, daß sie sehr viel auswendig

(*) Lib. IV. Fab. 24.

(**) Instit. Orat. Lib. XI. Cap. 2.

(***) In *Morhofii* Polyhist. Litt. Lib. II. Cap. VI. stehet, unter der Rubrik de Memoriae subsidiis, viel von solchen Künsten. Die Bilder des Buno über die Geschichte, über die Grammatik und über das Römische Recht sind Dir schon bekannt.

wendig lernten. In welchem Alter man sich aber bestrebte seinem Gedächtniß zu Hülfe zu kommen, müste man Anfangs den Verdruß verschlucken, das Geschriebne und Gelesene oft zu wiederholen, und gleichsam dieselbe Speise zu wiederkäuen. Das sagt ein Mann, der sich viel mit dem Unterricht der Jugend beschäftiget hatte. Ein andrer von demselben Fach, der Aeltre **Seneka** (*) redet auch viel vom starken Gedächtniß und von einer sehr leichten Gedächtnißkunst, die er zu lehren verspricht; damit er aber, nachdem er die äußerste Aufmerksamkeit erreget hat, hinter dem Berge behalten bleibet. Alle drei angezognen Stellen, aus dem **Plinius, Seneka** und **Quintilian,** sind herrlich vom **Gesner** in einem Buche erkläret, das bald Dein Handbuch werden soll. (**) Gleich wie derselbe alda das Exempel eines Neuern, dessen Gedächtniß zum Erstaunen gereichet, zugleich mit anbringt; so will Ich auch zweier neuerer Exempel, die nicht minder erstaunlich sind, und zwar deswegen gedenken, weil sie eben Unsre Rechenkunst betreffen. Das eine kenne Ich aus den neuesten **Mannigfaltigkeiten,** (***) wor-

(*) Prooem Controverſ.

(**) Chreſtomath. Pliniana. Nr. XIII - XV.

(***) Im 2ten Jahrgange 4 Quart. 700 - 703 S.

aus Ich Dirs, als das Buch bei Uns war, mit allen Umständen auch vorgelesen habe. Ein armer Arbeitsman, Jodadiah **Burton** mit Namen, der in **Engelland** zu **Elmton** gelebt, und vielleicht noch leben mag, weil er im Jahr 1751 erst 50 Jahre alt gewesen, hat, ob er gleich weder Ziffern noch Buchstaben schreiben können, doch so stark im Kopf zu rechnen, und sonderlich zu multipliziren gewust, daß er auch das Quadrat einer Zahl von 39 Ziffern verfertigen können. Das andre Exempel aber, das auch einen Engelländer betrifft, wirst Du, als ein Kunstverständiger, doch noch weit merkwürdiger finden; da nämlich die Quadratwurzel aus einer Zahl von 20, 30, 40, ja sogar einst aus einer von 53 Ziffern, in der Nacht, im Dunkeln, gezogen worden. Der große Mathematiker **Wallis** hat das geleistet, wie er in seiner Algebra (*) umständlich sagt, und aus selbiger **Heilbronner** in seiner Geschichte der Mathesis (**) anführet.

Soweit wirst Du es denn endlich wohl nicht bringen. Viel aber kann man leisten, oft auch unwahrscheinliche Dinge; wenn man nur Zutrauen zu seinen Kräften hat, versuchet und anhält.

Um Ostern des Jahrs 1781; also noch eher Du das siebte Jahr erreichet hast.

(*) Cap. CIII. Operum Vol. II.

(**) Lib. IV. Cap. V. §. 189. Pag. 815.

I. Tafel.

Rechnungsarten, deren Fächer durch eine Potenz der Zwei anwachsen.

Dekadik	Dyadik	Tetradik	Oktadik	Durch 16	32	64
1	. . 1	. . 1	. . 1	. . 1	. . 1	. . 1
2	. . 2					
4	. . 3	. . 2				
8	. . 4	. . . .	. . 2			
16	. . 5	. . 3	. . . .	. . 2		
32	. . 6	. . . .	. . . .	. . . .	. . 2	
64	. . 7	. . 4	. . 3	. . . .	. . . .	. . 2
128	. . 8					
256	. . 9	. . 5	. . . .	. . 3		
512	. . 10	. . . .	. . 4			
1,024	. . 11	. . 6	. . . .	. . . .	. . 3	
2,048	. . 12					
4,096	. . 13	. . 7	. . 5	. . 4	. . . .	. . 3
8,192	. . 14					
16,384	. . 15	. . 8				
32,768	. . 16	. . . .	. . 6	. . . .	. . 4	
65,536	. . 17	. . 9	. . . .	. . 5		
131,072	. . 18					
262,144	. . 19	. . 10	. . 7	. . . .	. . . .	. . 4
1) 524,288	. . 20					
1,048,576	. . 21	. . 11	. . . .	. . 6	. . 5	
2,097,152	. . 22	. . . .	. . 8			
4,194,304	. . 23	. . 12				
8,388,608	. . 24					
16,777,216	. . 25	. . 13	. . 9	. . 7	. . . .	. . 5
33,554,432	. . 26	. . . .	. . . .	. . . .	. . 6	
67,108,864	. . 27	. . 14				

II. Tafel

für die Tetradik, bei welcher nach der Dekadik gilt:

1	2	3	Fach.
1	2	3	1
4	8	12	2
16	32	48	3
64	128	192	4
256	512	768	5
1,024	2,048	3,072	6
4,096	8,192	12,288	7
16,384	32,768	49,152	8
65,536	131,072	196,608	9
262,144	524,288	786,432	10

II. Tafel

für die Tetradik, bei welcher noch der Octadik gilt:

1	2	3	Zch.
1	2	3	1
4	8	12	2
16	32	48	3
64	128	192	4
256	512	768	5
1,024	2,048	3,072	6
4,096	8,192	12,288	7
16,384	32,768	49,152	8
65,536	131,072	196,608	9
262,144	524,288	786,432	10

EIGENTHUM DER STADT AUGSBURG

H. 8°
Sohn.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Roscher, Georg A.

An meinen aeltsten beinahe sexjährigen Sohn, über die Art, wie er bisher im Rechnen unterrichtet worden

Lüneburg 1781

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- H 2166
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11252980-3
VD18 11942622-003